CÁLCULO DE ESFUERZOS EN VIGAS DE CONCRETO REFORZADO

Carlos Armando De Castro

Asesorías en Matemáticas, Física e Ingeniería

1. INTRODUCCIÓN

El concreto es uno de los materiales de construcción más utilizados, es a grandes rasgos una mezcla de cemento, arena, rocas molidas y agua que crea un elemento que se comporta como una roca sólida única; una característica crítica del concreto es que resiste carga relativamente bien a compresión pero a tensión tiene muy baja resistencia, por eso es necesario reforzar con barras de acero las partes que se hallen tensionadas (la falta de estos refuerzos causó la caída del puente del Chirajara en la vía al Llano, Colombia).

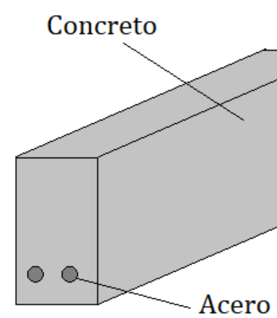


Figura 1.1. Esquema de una viga en concreto reforzado.

<u>Observación importante</u>: Es vital entonces tener en cuenta el sentido del momento flector M_u que actúa sobre ***cada parte de la viga*** para detectar las partes a tensión que requieran refuerzo en acero, como se muestra en la figura 1.2.

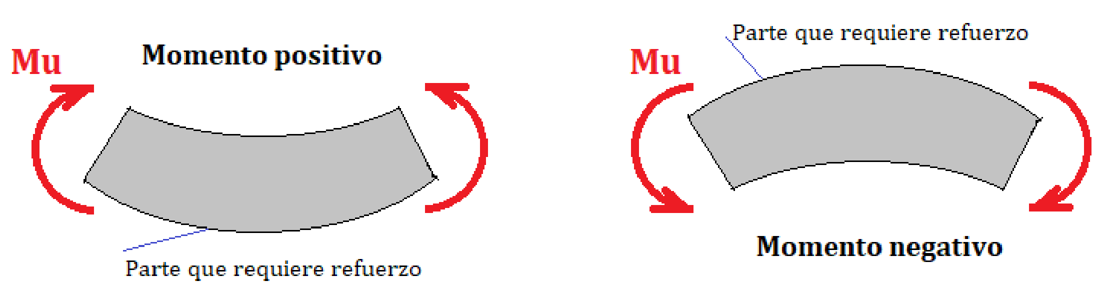


Figura 1.2. Sentido de los momentos flectores y partes de la viga que requieren refuerzo para cada caso.

La magnitud y sentido del momento flector en cada sección de una viga se calcula con los diagramas de fuerza y cortante y momento flector que dependen del caso de uso de cada viga.

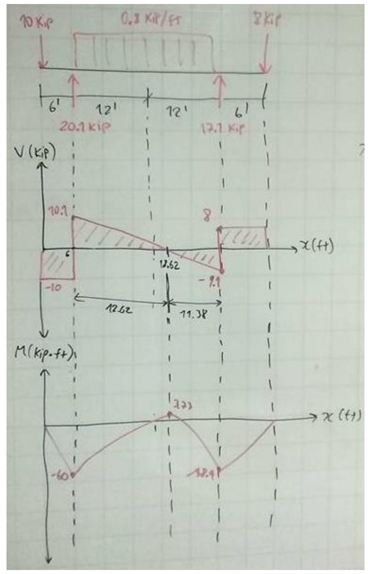


Figura 1.3. Ejemplo de cálculo a mano de diagramas de cortante y flector para una viga.

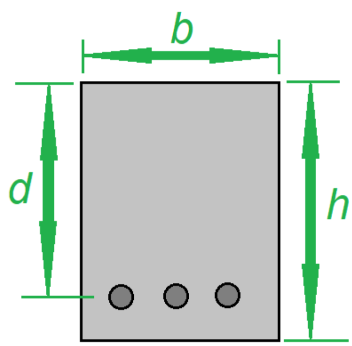


Figura 1.4. Medidas de la sección transversal de una viga en concreto reforzado.

El ***área efectiva*** de la viga con las medidas mostradas en la Fig. 1.4 es bd, se define la ***razón de refuerzo*** como el área de la sección transversal de las barras de acero A_s sobre el área efectiva de la viga:

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \quad (1)$$

La razón de módulos es el módulo de elasticidad del acero sobre el módulo de elasticidad del concreto:

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (2)$$

2. VIGA SUJETA A MOMENTO FLECTOR POSITIVO

En una viga flectada la parte a tensión del concreto se agrieta y ***quien soporta la carga de tensión es únicamente el acero de refuerzo***, mientras que la parte a compresión se distribuye linealmente sobre el concreto encima del *eje neutro* (el eje alrededor del cual se balancean tensión y compresión para contrarrestar el momento que actúa en esa sección de la viga) según se muestra en la Fig. 2.1.

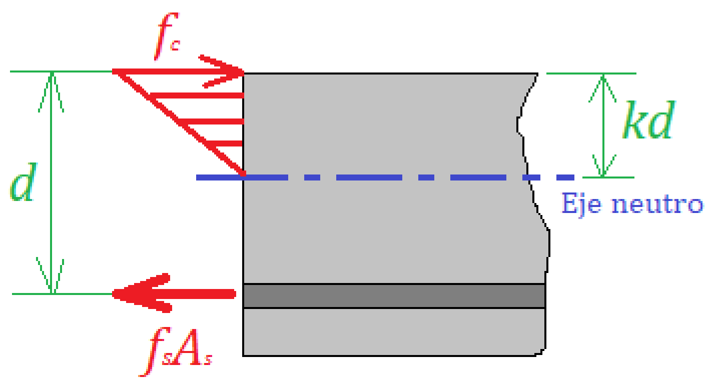


Figura 2.1. Esfuerzos en una viga bajo momento flector positivo.

Donde d es la distancia del borde superior al centro de las barras de refuerzo, k es la fracción de d donde se halla el eje neutro desde el borde superior, f_c es el máximo esfuerzo a compresión sobre el concreto y f_s es el esfuerzo en el refuerzo de acero. Las fuerzas de compresión y tensión son respectivamente:

$$C = \frac{1}{2} f_c kbd \quad (3a)$$

$$T = f_s A_s \quad (4a)$$

En la parte elástica de los materiales la relación entre esfuerzo y deformación es lineal, entonces:

$$C = \frac{1}{2} E_c \varepsilon_c kbd \quad (3b)$$

$$T = E_s \varepsilon_s A_s \quad (4b)$$

Por la carga distribuida triangular la resultante de C se encuentra a $kd/3$ desde el borde superior o (1-k/3)d desde el centro de las barras de acero de refuerzo.

Equilibrio de fuerzas:

El equilibrio de fuerzas en la dirección horizontal muestra que la fuerza a compresión y la fuerza a tensión deben ser iguales en magnitud:

$$T = C$$

Entonces de (3b) y (4b):

$$\frac{1}{2}E_c\varepsilon_c kbd = E_s\varepsilon_s A_s$$

Reorganizando:

$$k = 2\left(\frac{E_s}{E_c}\right)\left(\frac{A_s}{bd}\right)\left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_c}\right)$$

De las ecuaciones (1) y (2) se tiene:

$$k = 2n\rho\left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_c}\right) \quad (5)$$

En la parte elástica la deformación varía de manera lineal a lo largo de la cara de la viga:

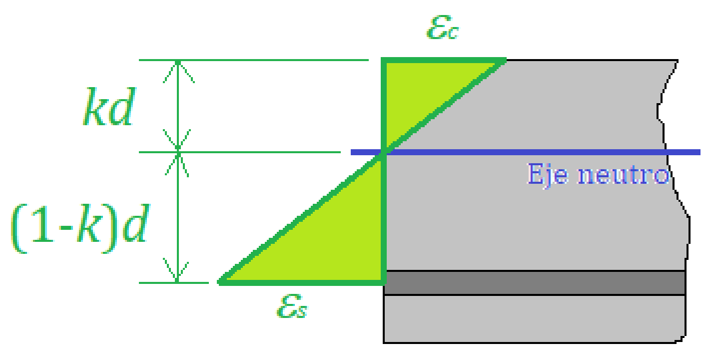


Figura 2.2. Deformación sobre la cara de una viga bajo momento flector positivo.

Por semejanza de triángulos en la Fig. 2.2. se tiene:

$$\frac{\varepsilon_c}{kd} = \frac{\varepsilon_s}{(1-k)d}$$

Reorganizando:

$$\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_c} = \frac{1-k}{k} \quad (6)$$

De (6) en (5) se tiene:

$$k = 2n\rho\left(\frac{1-k}{k}\right)$$

Reorganizando:

$$k^2 + 2n\rho k - 2\rho n = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática y tomando el valor positivo tenemos la fracción de la distancia d en la que se encuentra el eje neutro:

$$\boxed{k = \sqrt{\rho^2 n^2 + 2\rho n} - \rho n} \quad (7)$$

Equilibrio de momentos:

El momento flector en la sección es balanceado por el par entre T y C, entonces:

$$M_u = T\left(\frac{2}{3}kd + (1-k)d\right) = \left(1 - \frac{k}{3}\right)Td$$

Entonces:

$$T = C = \frac{M_u}{d}\left(1 - \frac{k}{3}\right)^{-1} \quad (8)$$

Se define:

$$j = 1 - \frac{k}{3} \quad (9)$$

De (9) en (8) se tiene:

$$T = C = \frac{M_u}{jd} \quad (10)$$

Igualando (10) y (4b) se tiene el esfuerzo que actúa en el acero de refuerzo:

$$\boxed{f_s = \frac{M_u}{jdA_s}} \quad (11)$$

Igualando (10) y (3b) se tiene el esfuerzo máximo de compresión en el concreto:

$$\boxed{f_c = \frac{2M_u}{jkbd^2}} \quad (12)$$

Estas ecuaciones desarrolladas se consideran válidas cuando

$$f_c \leq \frac{f_c''}{2} = \frac{0.85f_c'}{2} = 0.425{f_c}'$$

Donde ${f_c}'$ es la resistencia a compresión de la probeta de concreto. Para vigas con momento flector negativo el análisis es el mismo pero invirtiendo la viga (el borde desde el que se mide d ya no es el superior sino el inferior).

3. VIGA BALANCEADA

Una viga está balanceada cuando el concreto y el acero llegan a la falla simultáneamente, la falla se da cuando cada material llega a su respectiva deformación unitaria de falla (ε_{cu} para la falla por compresión del concreto y ε_y para la falla por fluencia en el acero, estos valores son dados para los materiales -hallados experimentalmente-). En ese momento la fracción de d donde se ubica el eje neutro es k_b, entonces las deformaciones son:

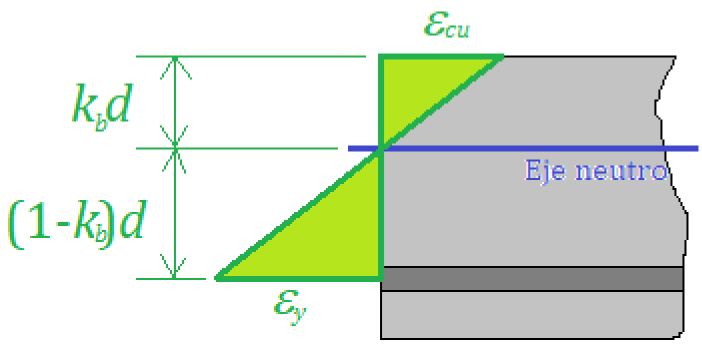


Figura 3.1. Deformaciones en una viga balanceada.

De la Fig. 3.1. por triángulos semejantes se tiene:

$$\frac{\varepsilon_{cu}}{k_b d} = \frac{\varepsilon_y}{(1-k_b)d}$$

Despejando:

$$\boxed{k_b = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_y}} \qquad (13)$$

Valores típicos para el acero y el concreto son $\varepsilon_{cu} = 0.003, \varepsilon_y = 0.002$ por lo que típicamente $k_b = 0.6$.

4. RESISTENCIA DE LA VIGA (MOMENTO NOMINAL)

Cuando la viga falla el concreto ya no está en la parte elástica y el esfuerzo no se distribuye de forma lineal sino irregular. La forma simplificada de analizar este caso se basa en las siguientes observaciones experimentales:

- El concreto está a un esfuerzo *casi* uniforme de $0.7f'_c$.
- El centroide (punto de acción de la fuerza a compresión) del esfuerzo sobre el concreto se halla a $0.4k_u d$ desde el borde superior, entonces la distancia entre la fuerza de tensión y la de compresión es $j_u d = (1-0.4k_u)d$.
- El acero se encuentra en el límite elástico (esfuerzo igual a f_y).

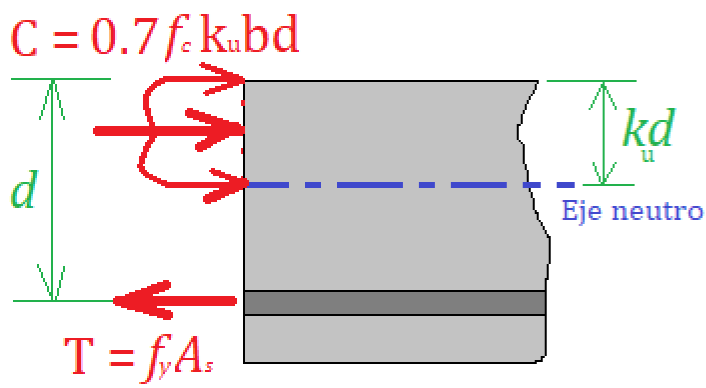


Figura 4.1. Esfuerzos en una viga al fallar.

Equilibrio horizontal:

Las fuerzas de tensión y compresión se compensan:

$$T = C$$

$$f_y A_s = 0.7 f_c' k_u bd$$

Entonces:

$$k_u = \frac{f_y A_s}{0.7 f_c' bd} \quad (14)$$

De la ecuación (1) en la (14) tenemos:

$$\boxed{k_u = \rho \left(\frac{f_y}{0.7 f_c'} \right)} \quad (15)$$

Equilibrio de momentos:

El ***momento nominal de resistencia*** M_n (el momento flector con el cual se produce la falla de la viga) se balancea con el par de las fuerzas de tensión y compresión, entonces:

$$M_n = Tj_u d$$

De donde:

$$\boxed{M_n = f_y A_s (1 - 0.4k_u)d} \quad (16)$$

Refuerzo balanceado:

Es la cantidad de refuerzo que debe haber para que la viga falle de forma balanceada, entonces:

$$k_u = k_b$$

De donde se tiene:

$$\boxed{\rho_b = \frac{0.7k_b f_c'}{f_y}} \quad (17)$$

Cantidad de refuerzo máximo:

La cantidad de refuerzo se limita para evitar una falla primero por compresión del concreto de la viga antes que por fluencia del acero lo que sería una FALLA CATASTRÓFICA, por conveniencia:

$$\boxed{\rho_{máx} = 0.75\rho_b} \quad (18)$$

Cantidad de refuerzo mínimo:

Para garantizar que el momento nominal sea mayor que el que produce agrietamiento del concreto lo recomendado es que

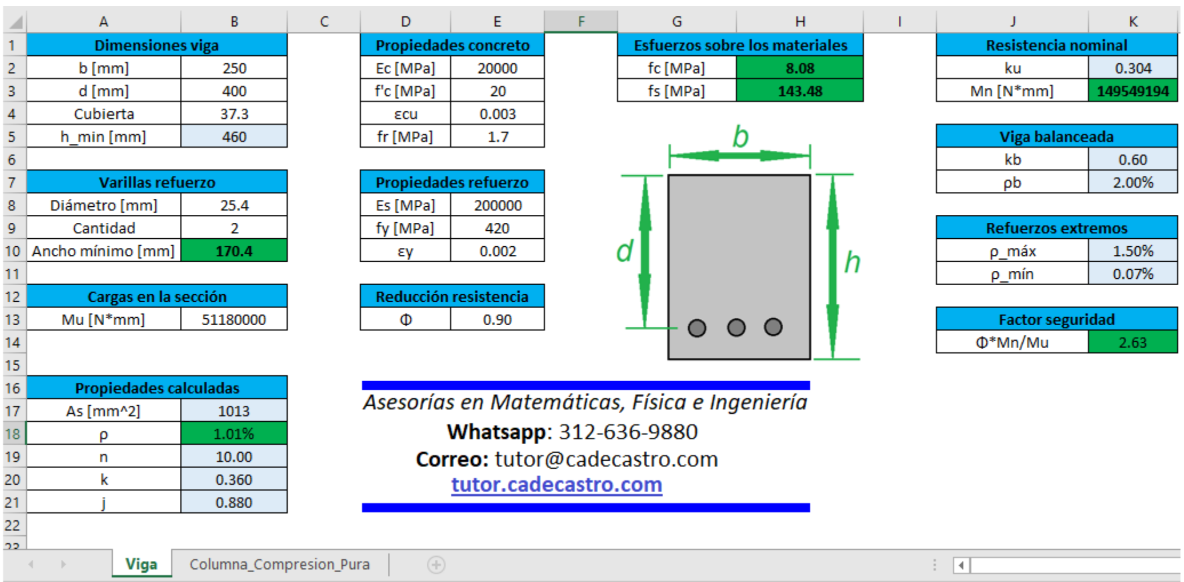
$$\rho \geq 0.2\ \%$$

Factor de reducción de resistencia y verificación del diseño:

Las normas técnicas utilizan un factor de reducción de resistencia $\Phi < 1$ para la resistencia de elementos estructurales diseñados (para vigas a flexión lo típico es $\Phi = 0.9$), por lo tanto el diseño es aceptable si se cumple:

$$\boxed{M_u < \Phi M_n}$$

Todas las ecuaciones aquí mostradas se pueden implementar en una hoja de cálculo de Excel:



Dimensiones viga	
b [mm]	250
d [mm]	400
Cubierta	37.3
h_min [mm]	460

Varillas refuerzo	
Diámetro [mm]	25.4
Cantidad	2
Ancho mínimo [mm]	170.4

Cargas en la sección	
Mu [N*mm]	51180000

Propiedades calculadas	
As [mm^2]	1013
ρ	1.01%
n	10.00
k	0.360
j	0.880

Propiedades concreto	
Ec [MPa]	20000
f'c [MPa]	20
εcu	0.003
fr [MPa]	1.7

Propiedades refuerzo	
Es [MPa]	200000
fy [MPa]	420
εy	0.002

Reducción resistencia	
Φ	0.90

Esfuerzos sobre los materiales	
fc [MPa]	8.08
fs [MPa]	143.48

Resistencia nominal	
ku	0.304
Mn [N*mm]	149549194

Viga balanceada	
kb	0.60
ρb	2.00%

Refuerzos extremos	
ρ_máx	1.50%
ρ_mín	0.07%

Factor seguridad	
Φ*Mn/Mu	2.63

BIBLIOGRAFÍA:

[1] Sozen, Ichinose & Pujol. ***Principles of reinforced concrete design***. CRC Press.

[2] Carlos Armando De Castro. ***Métodos numéricos básicos para ingeniería***. https://sites.google.com/site/matematicasingenieria/metodos_numericos_ingenieria

¿Desea más profundización y ejemplos prácticos?
Contáctenos para una clase personalizada.