Solución numérica del modelo del péndulo simple

Uno de los sistemas mecánicos más sencillos es el péndulo simple que actúa únicamente por acción de la gravedad, el cual es como se muestra a continuación

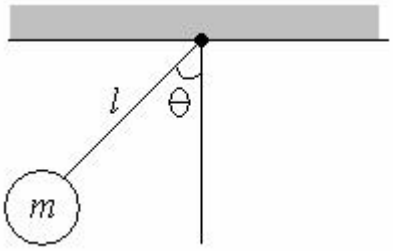


Figura 1.

Sin embargo, a pesar de lo sencillo del sistema, la ecuación diferencial resultante que modela el movimiento de la masa es no lineal, por lo cual generalmente se trabaja con un modelo linealizado o se resuelve numéricamente.

En el presente trabajo se resolverá numéricamente la ecuación diferencial del movimiento y se comparará con la solución analítica del sistema linealizado.

La ecuación del movimiento de la masa (bien conocida por todo estudiante de matemáticas, física o ingeniería) no se demostrará aquí, sin embargo, en otro escrito de ésta misma página Web se halla con tres métodos diferentes.

La ecuación del movimiento es

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$

y su forma linealizada es

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

aprovechando el hecho que $\sin(\theta) \approx \theta$ para valores pequeños de θ.

Utilizando cualquiera de los métodos para resolver ecuaciones diferenciales de orden superior, tenemos que la solución de la ecuación linealizada es

$$\theta(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\tfrac{g}{l}} \cdot t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\tfrac{g}{l}} \cdot t\right)$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes que se hallan por medio de las condiciones iniciales del sistema.

El sistema que resolveremos será uno con l = 0.5 m. y condiciones iniciales $\theta(0) = \pi/3, \dot{\theta}(0) = 0$ y se tomará g = 9.81 m/s^2. La simulación será realizada para $0 \le t \le 1800\, s$.

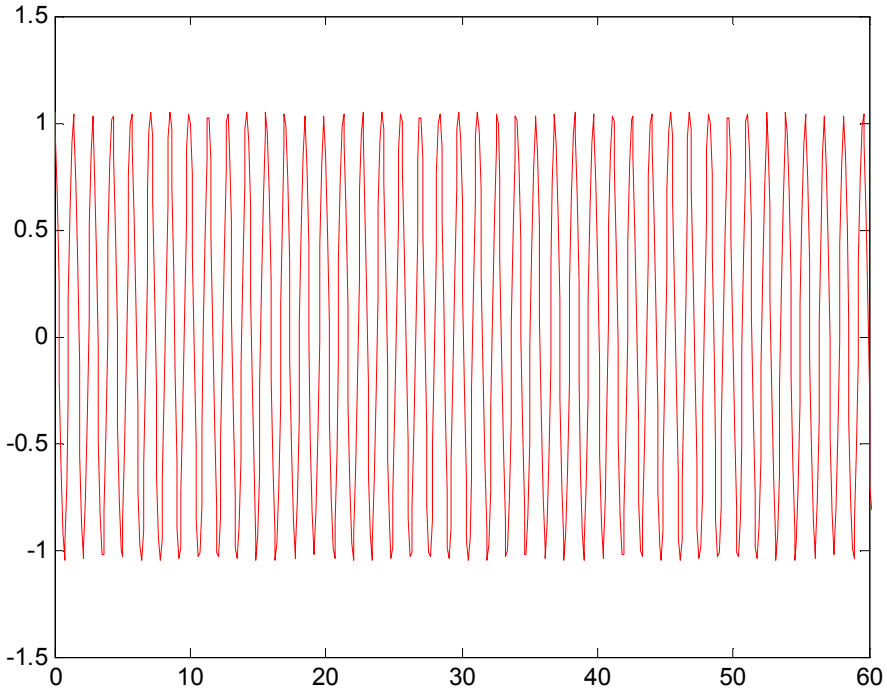
- **Solución analítica de la ecuación linealizada**

La solución analítica de la ecuación linealizada es entonces

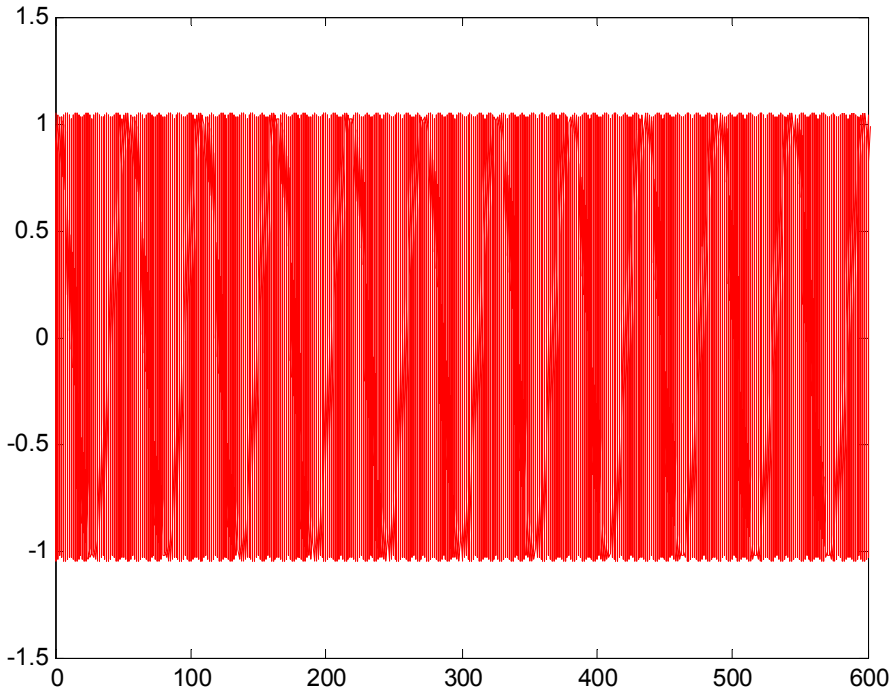
$$\theta(t) = \frac{\pi}{3}\cos(4.4294t)$$

Y la gráfica de la solución analítica de la ecuación linealizada es en distintos intervalos:

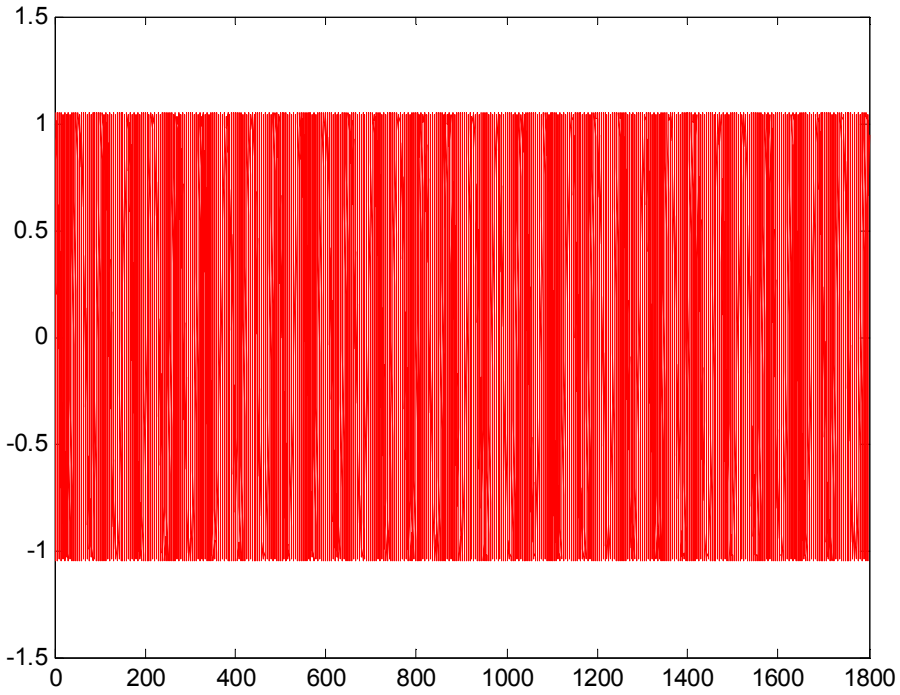
t = 1 min.:



t = 10 min.:



t = 30 min.:



- **Solución numérica de la ecuación del sistema**

Para hallar la solución numérica de la ecuación no lineal que describe el movimiento del sistema se procedió a elaborar el siguiente algoritmo en Matlab, el cual permite elegir el sistema de unidades a utilizar y variar la longitud de la cuerda que sostiene a la masa. La solución numérica se halla utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden para sistemas de ecuaciones diferenciales luego de hacer las sustituciones

$$u_1 = \theta$$
$$u_2 = \dot{\theta}$$

De donde resulta el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden en forma canónica

$$\dot{u}_1 = u_2$$
$$\dot{u}_2 = -\tfrac{g}{l}\sin u_1$$

La salida del programa es la gráfica del ángulo θ versus tiempo, aunque puede ser modificado para entregar una tabla con las posición y la velocidad angular de la masa en distintos instantes del tiempo:

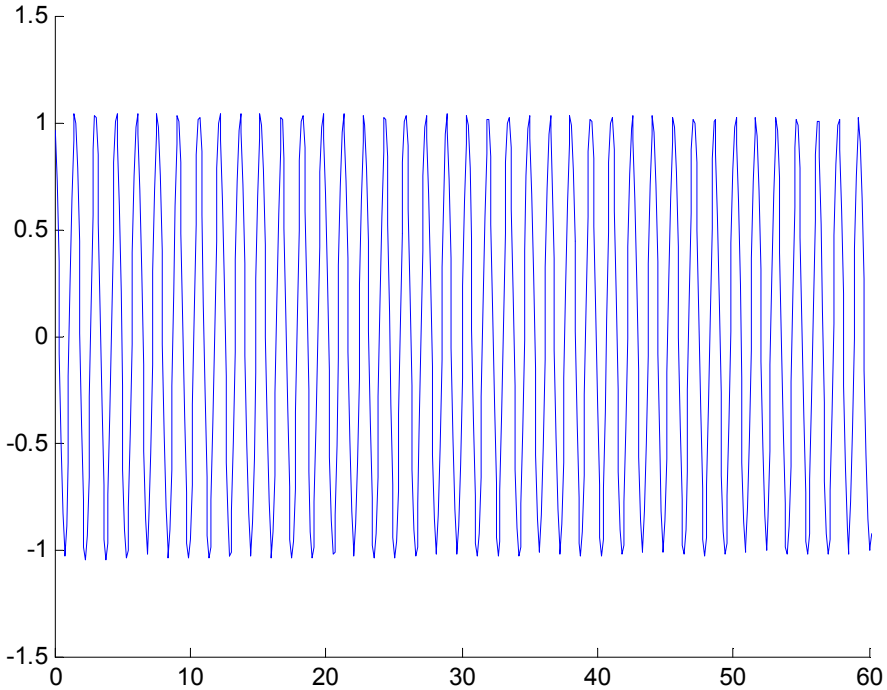
```
function pendulo

ca=0;
while ca==0;
    sistema=input('Sistema inglés: opción 1, Sistema Internacional:
opción 2. Selección: ');
    switch sistema
        case 1;
            g=32.2;
            l=input('Longitud de la cuerda (ft): ');
            ca=1;
        case 2;
            g=9.81;
            l=input('Longitud de la cuerda (m): ');
            ca=1;
        otherwise
            ('Elección no válida.')
            ca=0;
    end
end

a=input('Tiempo inicial de la simulación (s): ');
u1=input('Ángulo inicial (rad): ');
u2=input('Velocidad angular inicial (rad/s): ');
b=input('Tiempo final de la simulación (s): ');
h=input('Tamaño de paso h= ');

n=(b-a)/h;
t=a;


U1(1)=u1;
```

```
U2(1)=u2;

T(1)=t;

for i=1:n;

    k11=h*u2;
    k12=-h*g/l*sin(u1);

    k21=h*(u2+0.5*k12);
    k22=-h*g/l*sin(u1+0.5*k11);

    k31=h*(u2+0.5*k22);
    k32=-h*g/l*sin(u1+0.5*k21);

    k41=h*(u2+k32);
    k42=-h*g/l*sin(u1+k31);

    u1=u1+(k11+2*k21+2*k31+k41)/6;
    u2=u2+(k12+2*k22+2*k32+k42)/6;

    U1(i)=u1;
    U2(i)=u2;
    T(i)=t;

    t=a+(i+1)*h;


end

X(1,:)=T(:);
X(2,:)=U1(:);
X(3,:)=U2(:);

hold on;
plot(X(1,:),X(2,:),'b');
```

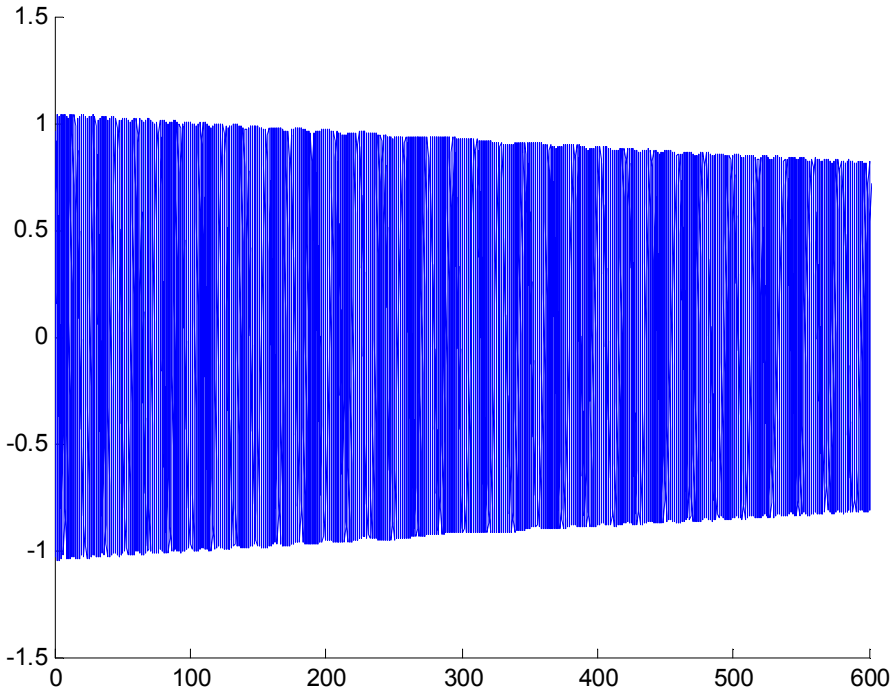
Debe tenerse cuidado al elegir el tamaño de paso h de la iteración, lo cual se muestra en la salida del programa para $h = 0.1$ y $h = 0.05$:

- ***h* =0.1:**

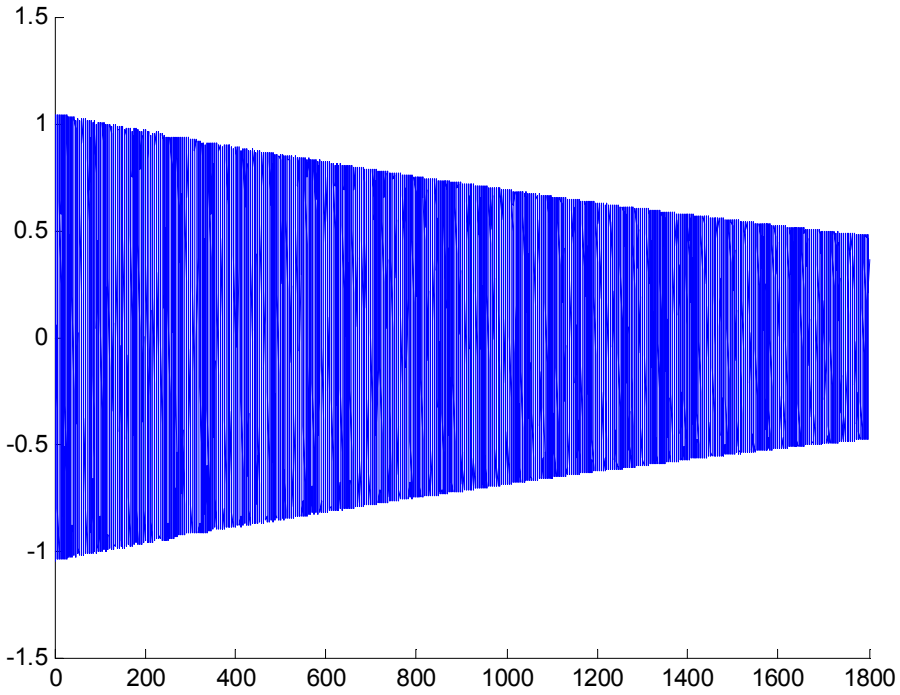
t = 1 min.


1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
10
20
30
40
50
60

t = 10 min:

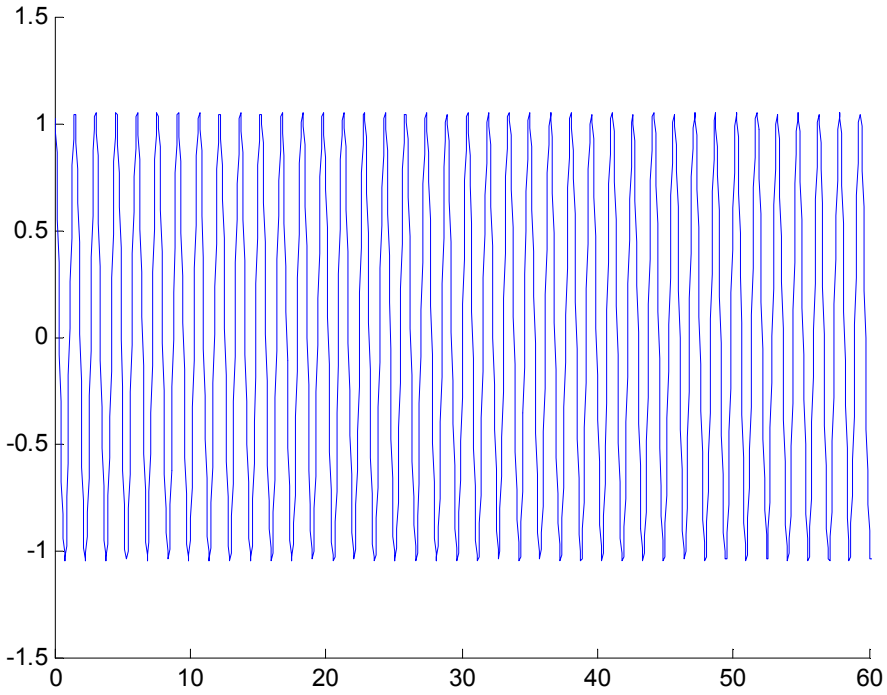

1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
100
200
300
400
500
600

t = 30 min.

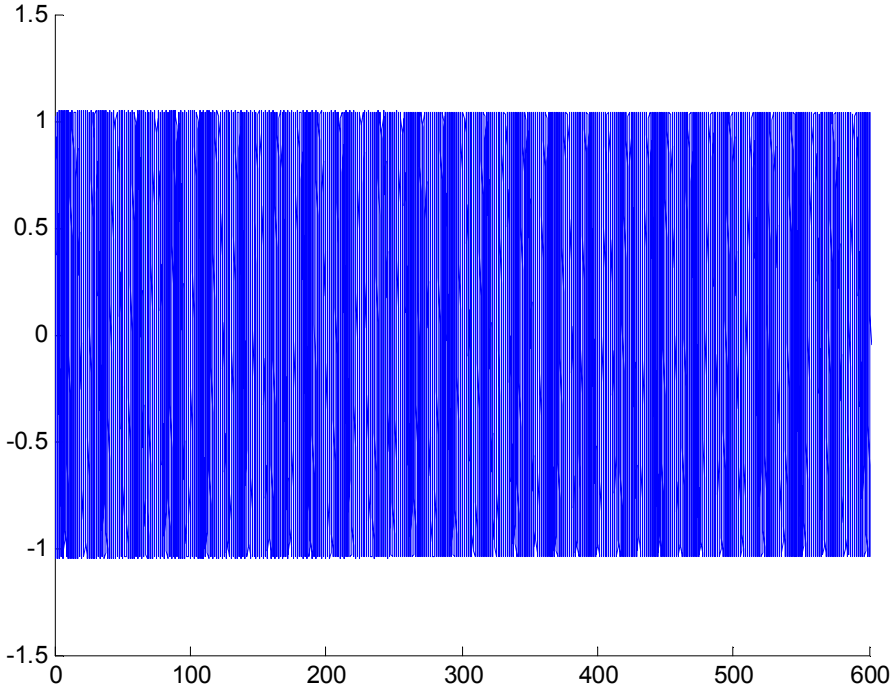


- ***h*** **=0.01:**

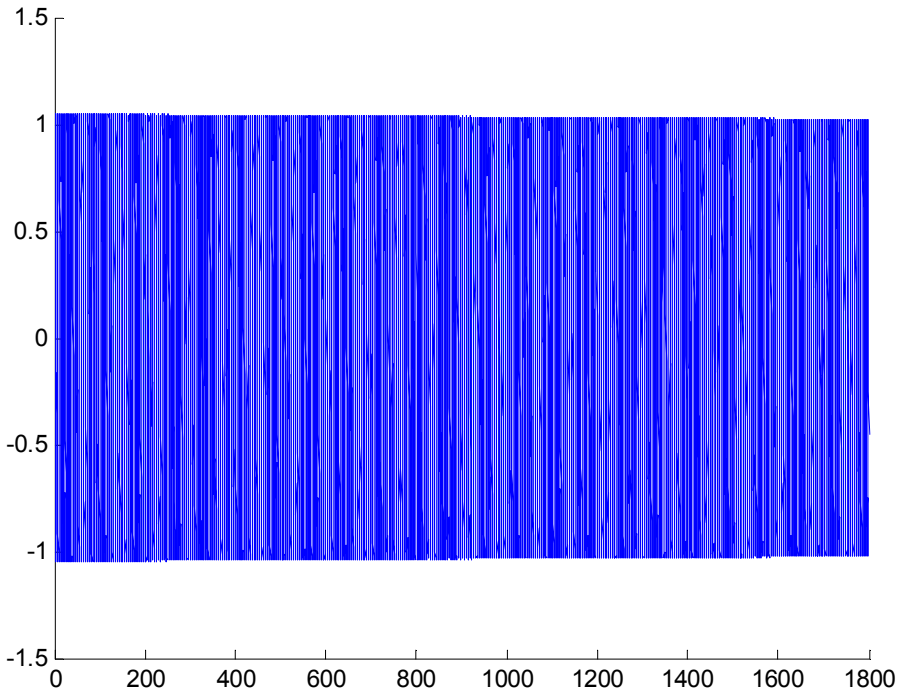
t = 1 min.



t = 10 min.



t = 30 min.



Como puede verse, a un menor tamaño de paso la aproximación numérica es más cercana al comportamiento real del sistema, ya que es claro que el movimiento de la masa no debe frenarse al no haber elementos que disipen energía en el sistema idealizado que hemos estado considerando.

Igualmente, de las gráficas puede observarse que la solución real de la ecuación linealizada es bastante cercana a la solución numérica de la ecuación no lineal para tamaños de paso pequeños, lo cual muestra que la linealización no quita mucha exactitud en la respuesta.