# APUNTES DE CLASES – INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

Carlos Armando De Castro

*Asesorías en Matemáticas, Física e Ingeniería*

## 1. LA SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

La sustitución trigonométrica se utiliza cuando en las integrales aparecen expresiones como:

$$x^2+9, 1-x^2, 3x^2-5, \ldots$$

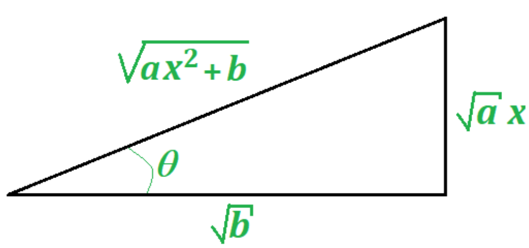
Es decir, con algún $x^2$ o múltiplo de él sumando o restando con alguna constante. Se tienen entonces los siguientes casos de interés.

**Caso $ax^2+b$:**

La sustitución que se hace es

$$\boxed{x=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\tan\theta} \quad (1)$$

Esto es equivalente a tener el siguiente triángulo rectángulo:




Así, la expresión original resulta ser:

$$a\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\tan\theta\right)^2+b=b\tan^2\theta+b$$

$$=b(\tan^2\theta+1)=b\sec^2\theta$$

Diferenciando la sustitución tenemos:

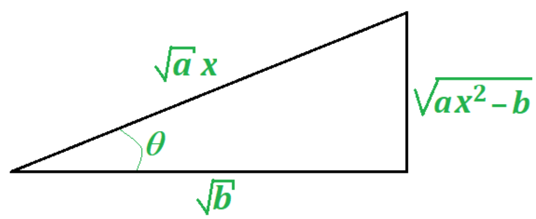
$$dx=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\sec^2\theta\, d\theta \quad (2)$$

**Caso $ax^2-b$:**

La sustitución que se hace es

$$\boxed{x=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\sec\theta} \quad (3)$$

Esto es equivalente a tener el siguiente triángulo rectángulo:




Así, la expresión original resulta ser:

$$a\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\sec\theta\right)^2-b=b\sec^2\theta-b$$

$$=b(\sec^2\theta-1)=b\tan^2\theta$$

Diferenciando la sustitución tenemos:

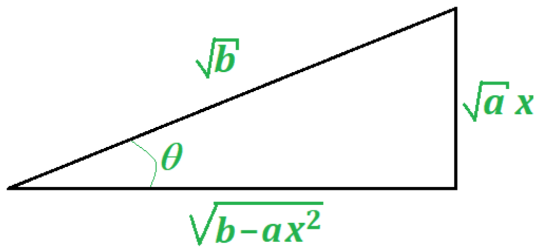
$$dx=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\sec\theta\tan\theta\, d\theta \quad (4)$$

**Caso $b-ax^2$:**

La sustitución que se hace es

$$\boxed{x=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\sin\theta} \quad (5)$$

Esto es equivalente a tener el siguiente triángulo rectángulo:




Así, la expresión original resulta ser:

$$b-a\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\sin\theta\right)^2=b-b\sin^2\theta$$

$$=b(1-\sin^2\theta)=b\cos^2\theta$$

Diferenciando la sustitución tenemos:

$$dx=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\cos\theta\,d\theta \quad (6)$$

***Ejemplo 1:***

Resolveremos la integral:

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$$

Ésta integral es el primer caso que tratamos, de la Ecuación 1 y 2 tenemos:

$$x=\tan\theta$$

$$dx=\sec^2\theta\,d\theta$$

Sustituyendo en la integral:

$$\int\frac{\sec^2\theta\,d\theta}{(\tan^2\theta+1)^{3/2}}=\int\frac{\sec^2\theta\,d\theta}{(\sec^2\theta)^{3/2}}$$

$$=\int\frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sec^3\theta}=\int\frac{d\theta}{\sec\theta}=\int\cos\theta\,d\theta$$

$$=\sin\theta+C$$

Del triángulo rectángulo equivalente tenemos:

$$\sin\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Entonces la respuesta es:

$$\boxed{\int\frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C}$$

***Ejemplo 2:***

Resolveremos la integral:

$$\int\frac{dx}{9-x^2}$$

Ésta integral es el tercer caso que tratamos, de la Ecuación 5 y 6 tenemos:

$$x=3\sin\theta$$

$$dx=3\cos\theta\,d\theta$$

Sustituyendo en la integral:

$$\int\frac{3\cos\theta\,d\theta}{9-9\sin^2\theta}=\frac{1}{3}\int\frac{\cos\theta\,d\theta}{1-\sin^2\theta}$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{\cos\theta\,d\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{3}\int\frac{d\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{3}\int\sec\theta\,d\theta$$

De las tablas de integrales básicas se sabe que:

$$\frac{1}{3}\int\sec\theta\,d\theta=\frac{1}{3}\ln(\sec\theta+\tan\theta)+C$$

Del triángulo rectángulo equivalente tenemos:

$$\sec\theta=\frac{3}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$\tan\theta=\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$$

Entonces la respuesta es:

$$\boxed{\int \frac{dx}{9-x^2} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{x+3}{\sqrt{9-x^2}}\right) + C}$$

***Ejemplo 3:***

Resolveremos la integral:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x}$$

Primero completamos el cuadrado:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+1-1}$$

$$= \int \frac{dx}{(x+1)^2-1}$$

Ésta integral es el segundo caso que tratamos con una ligera modificación, de la Ecuación 3 y 4 tenemos:

$$x+1 = \sec\theta$$

$$dx = \sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

Sustituyendo en la integral:

$$\int \frac{\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{\sec^2\theta - 1} = \int \frac{\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{\tan^2\theta}$$

$$= \int \frac{\sec\theta\, d\theta}{\tan\theta} = \int \csc\theta\, d\theta$$

De las tablas de integrales básicas se sabe que:

$$\int \csc\theta\, d\theta = -\ln(\csc\theta + \cot\theta) + C$$

Del triángulo rectángulo equivalente tenemos:

$$\csc\theta = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}}$$

Entonces la respuesta es:

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2+2x} = -\ln\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x}}\right) + C}$$

*¿Desea más profundización y ejemplos prácticos?*

*Contáctenos para una clase personalizada.*