APUNTES DE CLASES – SUCESIONES Y SERIES

Carlos Armando De Castro

Asesorías en Matemáticas, Física e Ingeniería

1. SUCESIONES

Una sucesión $\{a_n\}_{n=1}$ es una secuencia de números:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Se dice que una sucesión ***converge*** cuando la secuencia numérica llega a un valor, es decir, deja de crecer o variar indefinidamente. En términos matemáticos, una sucesión converge si:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = L}$$

Para algún número real L. Si la sucesión no converge (el límite da infinito o no existe) se dice que ***diverge***.

2. SERIES

Una serie es la suma (infinita) de los términos de una sucesión:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

Se dice que una serie ***converge*** cuando la suma infinita entrega un valor finito, es decir, no da infinito al sumar, si la serie no converge se dice que ***diverge***. La primera condición para que una serie converja es que los valores más lejanos de la sucesión que se suma se hagan nulos:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

Ésta condición es *necesaria pero no suficiente*, es decir, que el límite sea cero no garantiza que la serie sea convergente pero si es diferente de cero inmediatamente nos dice que es divergente.

Para saber si una serie converge se utilizan los tests de convergencia, listados a continuación.

TESTS DE CONVERGENCIA

Para saber si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge o diverge se tienen los criterios:

i) Test de la divergencia

Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ la serie es divergente.

ii) Test de la integral

Sea *f(x)* una función idéntica al a_n dentro de la serie que además sea continua y decreciente, entonces, si la integral impropia

$$\int_0^{\infty} f(x)dx$$

converge la serie converge, y si la integral diverge la serie diverge.

iii) Test del cociente o razón

Si:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

$$=\begin{cases} <1, \text{la serie es convergente} \\ =1, \text{el criterio no decide} \\ >1, \text{la serie es divergente} \end{cases}$$

***iv) Test de la raíz*:**

Si:

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}$$

$$=\begin{cases} <1, \text{la serie es convergente} \\ =1, \text{el criterio no decide} \\ >1, \text{la serie es divergente} \end{cases}$$

v) Test de la serie alternante

Para una serie cuyo signo es alternante

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$$

La serie converge si se cumplen las dos condiciones:

1- a_n es decreciente, es decir, $a_{n+1} < a_n$

2- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

vi) Test de comparación directa

Es cuando se conoce una serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ que es parecida a la serie que nos interesa, si la serie conocida converge y

$$a_n < b_n$$

Entonces la serie que nos interesa converge. Si la serie conocida diverge y

$$a_n > b_n$$

Entonces la serie que nos interesa diverge.

vii) Test de comparación al límite

Es cuando se conoce una serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ que es parecida a la serie que nos interesa, entonces si el límite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$$

Da un número real (no infinito) entonces ambas series se comportan igual (convergen o divergen de acuerdo al comportamiento ya conocido de b_n).

¿Cuándo usar cada test de convergencia?

No hay una regla general para cuándo se debe usar cada test pero de acuerdo a la forma de la serie se puede dar una idea:

- Siempre hay que verificar primero el test de la divergencia para garantizar que no diverge inmediatamente.
- De acuerdo a cómo sea la serie se van descartando tests a usar.
- Si los términos de la serie son una función que se pueda integrar usar el test de la integral.
- Si aparecen factoriales usar el test del cociente.
- Si todo tiene n ó polinomio de n como potencia usar test de la raíz.
- Si la serie tiene $(-1)^n$ usar test de serie alternante.

- Si todos los tests anteriores fallan utilizar uno de los de comparación.

APROXIMACIONES ÚTILES

Las aproximaciones dadas a continuación son <u>únicamente</u> para n "muy grande" ($n \to \infty$) y son muy útiles a la hora de hallar series con las cuáles comparar, son los llamados "*machetazos*" en Colombia:

* En un polinomio el término con el mayor exponente domina a los demás, es decir

$$n^2 + n + 3 \approx n^2$$

$$n + 8 \approx n$$

También cuando hay sumas o restas así el término que crezca más rápido domina a los demás:

$$2^n + n \approx 2^n$$

* Para las funciones trigonométricas se tiene:

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \approx \tan\left(\frac{1}{n}\right) \approx \frac{1}{n}$$

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) \approx 1$$

$$\arctan(n) \approx \frac{\pi}{2}$$

3. SERIES ESPECIALES

Existen series especiales conocidas que son la serie geométrica, la serie-p y las series telescópicas.

Serie geométrica

Las series geométricas tienen la siguiente forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

Donde r es un número real dado. Aplicado el test del cociente se tiene que la serie converge si

$$|r| < 1$$

Lo que hace especial a la serie geométrica es que su suma se puede calcular si la serie converge, dando como resultado:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad , \quad \text{si } |r| < 1}$$

<u>Si la serie no inicia de cero</u> ésta fórmula no se puede usar directamente y hay que modificar el índice para que inicie de cero y poder utilizarla.

Serie-p

Las series-p tienen la siguiente forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Donde p es un número real dado. Aplicado el test de la integral se tiene que la serie converge si

$$\boxed{p > 1}$$

Y diverge en todos los demás casos.

Series telescópicas

Son series a las que también se les puede calcular la suma, se dan cuando términos sucesivos se van cancelando y dejando ciertos valores fijos, por ejemplo la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

Al hacer las sumas acumuladas sucesivas se tiene:

$$S_1 = 1-\frac{1}{2}$$
$$S_2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3} = 1-\frac{1}{3}$$
$$S_3 = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4} = 1-\frac{1}{4}$$

Se observa entonces que para la suma de n términos acumulados el valor es:

$$S_n = 1-\frac{1}{n+1}$$

Por tanto el valor de la suma infinita es cuando n tiene al infinito:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$$

4. SERIES DE POTENCIAS

Son series que tienen a la variable independiente x como argumento y se utilizan para aproximar funciones. Una serie de potencias es da la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^{\,n}$$

Donde c es el centro de la serie (“centrada en c”). Para las series de potencia interesa saber para qué valores de x es convergente (el “intervalo de convergencia” de la serie) ya que si diverge no nos sirve. El criterio utilizado para las series de potencia es el criterio del cociente, garantizando convergencia se tiene:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-c)^{n+1}}{a_n(x-c)^n}\right| < 1}$$

Separando el exponente y desarrollando se tiene:

$$|x-c|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

Si el límite tiene un valor de cero la serie converge para todo valor de x, si el límite es infinito la serie no converge nunca y si el límite tiene un valor L cualquiera positivo se tiene:

$$|x-c|L < 1$$

$$|x-c| < \frac{1}{L}$$

$$-\frac{1}{L} < x-c < \frac{1}{L}$$

$$\boxed{c-\frac{1}{L} < x < c+\frac{1}{L}}$$

Son los valores donde se sabe que la serie es convergente; después hay que evaluar con algún test de convergencia qué pasa cuando x es igual a los extremos del intervalo.

5. SERIES DE TAYLOR Y MCLAURIN

Son series de potencia que aproximan a cualquier función *f(x)*, para la serie centrada en c se tiene que la serie de Taylor es:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^{n}}$$

La serie de McLaurin es simplemente la serie de Taylor centrada en *c* = 0.

SERIES DE MCLAURIN CONOCIDAS

Las siguientes series de McLaurin conocidas se sacan en base a la definición dada, se tienen:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

¿Desea más profundización y ejemplos prácticos?

Contáctenos para una clase personalizada.