ANÁLISIS CINEMÁTICO Y CINÉTICO MECANISMO MANIVELA-CORREDERA

Carlos Armando De Castro

Asesorías en Matemáticas, Física e Ingeniería

1. INTRODUCCIÓN

En éste escrito se muestra el análisis cinemático y cinético de un mecanismo manivela-corredera, con ecuaciones implementadas en Excel para los cálculos y gráficas. El esquema generalizado del mecanismo es el siguiente:

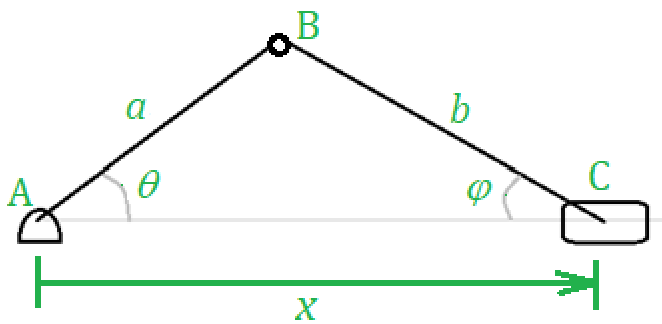

Figura 1.1. Mecanismo manivela-corredera.

Todos los ángulos son medidos desde el eje x (horizontal) con el ángulo φ siendo positivo en dirección horaria, el eslabón impulsor (de entrada) es el AB que parte del pivote (o apoyo) A, el movimiento de la corredera C se limita a la dirección horizontal. Éste mecanismo es muy utilizado en maquinaria como cortadoras, compresores y motores [1].

2. ANÁLISIS DE POSICIÓN

El análisis de posición es utilizado para que con un ángulo de entrada θ y conociendo las longitudes de los eslabones se puedan establecer el ángulo φ de la biela BC y por lo tanto la posición de la corredera (salida) del mecanismo. Si bien éste análisis puede hacerse de forma gráfica rápidamente para una posición particular se requiere repetir varias veces el mismo proceso para analizar diversas posiciones del mecanismo [1].

Para analizar la posición analíticamente se mide la posición de la corredera x desde el punto A medida positiva hacia la derecha, entonces se tiene por trigonometría en la dirección horizontal y vertical respectivamente:

$$\begin{cases} a\sin\theta = b\sin\varphi \\ x = a\cos\theta + b\cos\varphi \end{cases} \tag{1}$$

Para cualquier ángulo de entrada se tiene entonces el ángulo de la biela BC:

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{a\sin\theta}{b}\right) \quad (2)$$

Esto representa un triángulo rectángulo como el de la siguiente figura:

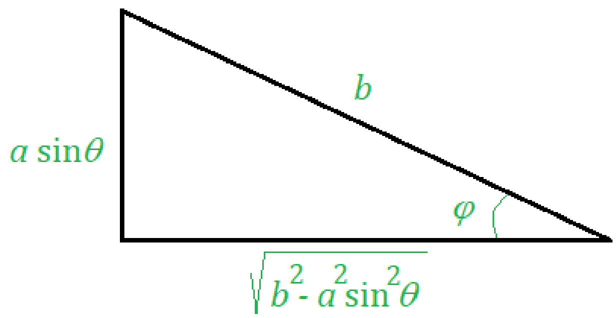

Figura 2.1. Triángulo rectángulo representado por la ecuación (2).

Del triángulo se tiene que el coseno de φ es el cateto adyacente sobre la hipotenusa del mismo, esto se reemplaza en la ecuación (1) entregando la posición de la corredera para cualquier ángulo de entrada:

$$\boxed{x = a\cos\theta + \sqrt{b^2 - a^2\sin^2\theta}} \quad (3)$$

Ejemplo 2.1. Análisis de posición de un mecanismo manivela-corredera con a = 100 mm, b = 200 mm. Calculando y graficando en Excel las ecuaciones (2) y (3) se tiene:

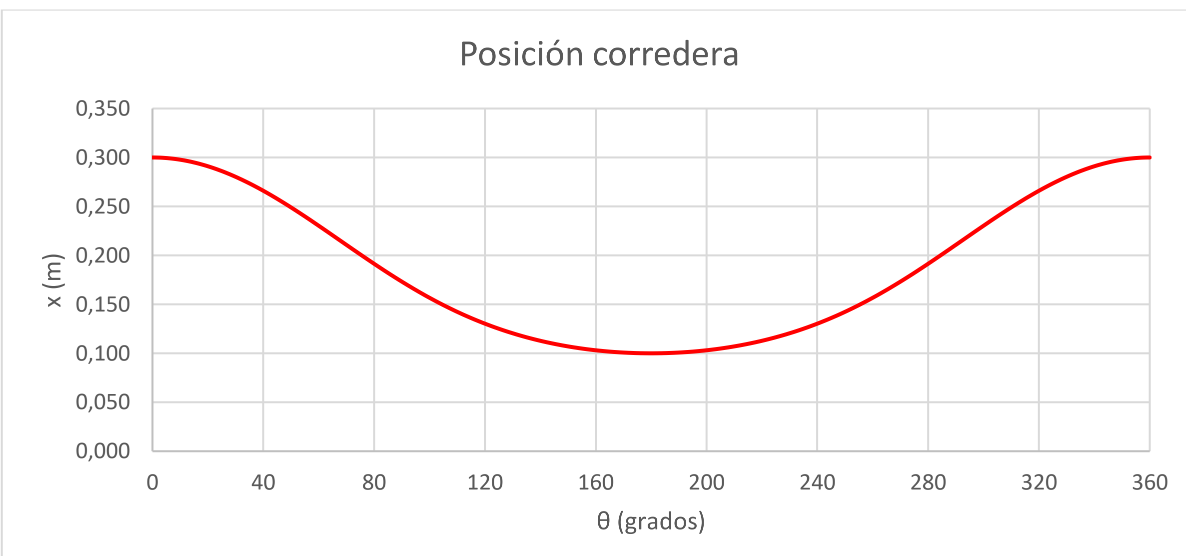

Figura 2.2. Posición de la corredera para un ciclo completo.

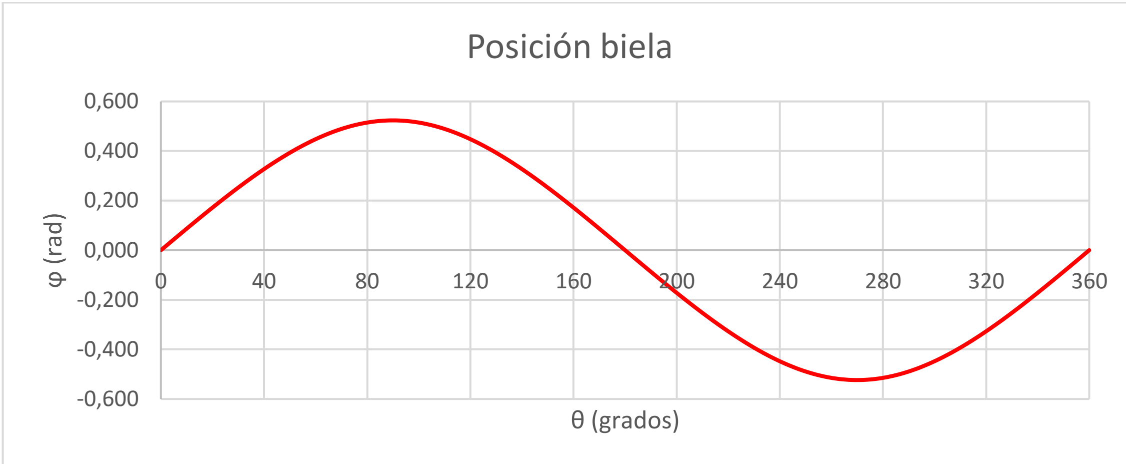

Figura 2.3. Posición angular de la biela para un ciclo completo.

3. ANÁLISIS DE VELOCIDAD

En lo que sigue el punto encima de la variable representa derivada respecto al tiempo, así $\dot{\theta}$ es la velocidad angular de la manivela AB, $\dot{\varphi}$ y $\ddot{\varphi}$ son la velocidad angular y la aceleración angular de la biela BC respectivamente; $\dot{x}$ y $\ddot{x}$ son la velocidad y la aceleración de la corredera.

Para el análisis de velocidad se derivan las ecuaciones de posición respecto al tiempo [2], entonces se tiene derivando la primera parte de la ecuación (1):

$$a\dot{\theta}\cos\theta = b\dot{\varphi}\cos\varphi \quad (4)$$

Despejando la velocidad angular de la biela:

$$\dot{\varphi} = \frac{a\dot{\theta}\cos\theta}{b\cos\varphi} \quad (5)$$

Derivando respecto al tiempo la ecuación (3) se tiene la velocidad de la corredera:

$$\boxed{\dot{x} = \dot{\theta}\left[\frac{a^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{b^2 - a^2\sin^2\theta}} - a\sin\theta\right]} \quad (6)$$

Ejemplo 3.1. Análisis de velocidad de un mecanismo manivela-corredera con a = 100 mm, b = 200 mm, $\omega_{AB} = 10.47$ rad/s. Calculando y graficando en Excel las ecuaciones (5) y (6) y teniendo en cuenta los resultados del análisis de posición se tiene:

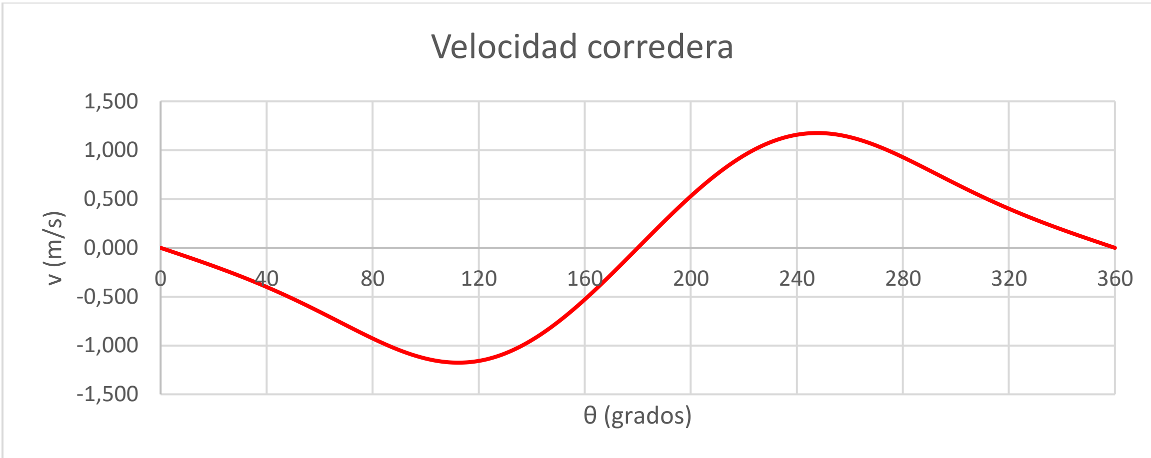

Figura 3.1. Velocidad de la corredera para un ciclo completo.

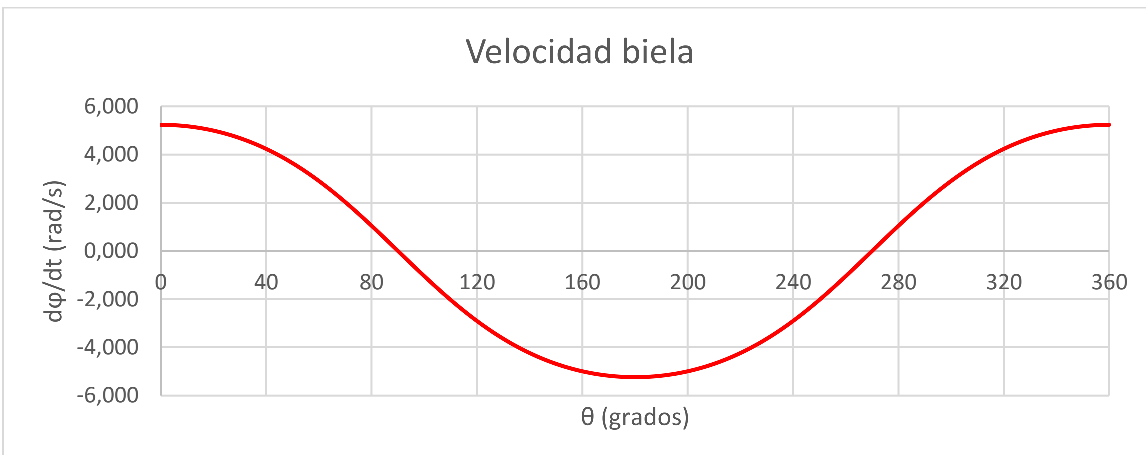

Figura 3.2. Velocidad angular de la biela para un ciclo completo.

4. ANÁLISIS DE ACELERACIÓN

Para el análisis de aceleración se derivan las ecuaciones de velocidad respecto al tiempo [2], recordando que estamos tomando $\ddot{\theta} = 0$; entonces se tiene derivando la ecuación (4):

$$-a\dot{\theta}^2 \sin\theta = -b\dot{\varphi}^2 \sin\varphi + b\ddot{\varphi}\cos\varphi$$

Despejando la aceleración angular de la biela:

$$\ddot{\varphi} = \frac{b\dot{\varphi}^2 \sin\varphi - a\dot{\theta}^2 \sin\theta}{b\cos\varphi} \qquad (7)$$

Derivando respecto al tiempo la ecuación (6) se tiene la aceleración de la corredera:

$$\boxed{\ddot{x} = \dot{\theta}^2\left[\frac{a^2(\sin^2\theta - \cos^2\theta)}{\sqrt{b^2 - a^2\sin^2\theta}} - \frac{a^4\sin^2\theta\cos^2\theta}{(b^2 - a^2\sin^2\theta)^{3/2}} - a\cos\theta\right]} \qquad (8)$$

Ejemplo 4.1. Análisis de velocidad de un mecanismo manivela-corredera con a = 100 mm, b = 200 mm, ω_{AB} = 10.47 rad/s. Calculando y graficando en Excel las ecuaciones (7) y (8) y teniendo en cuenta los resultados del análisis de posición y velocidad se tiene:

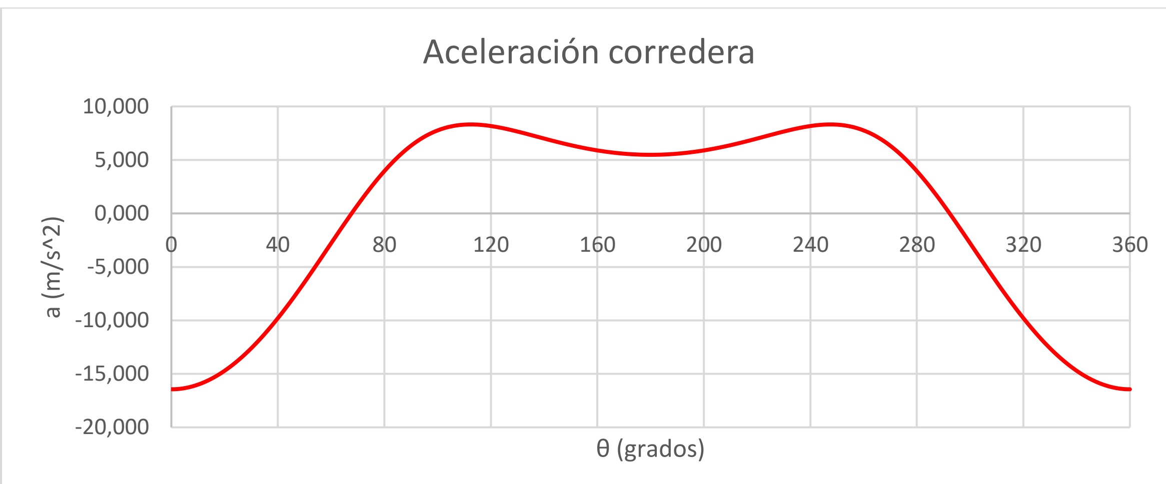

Figura 4.1. Aceleración de la corredera para un ciclo completo.

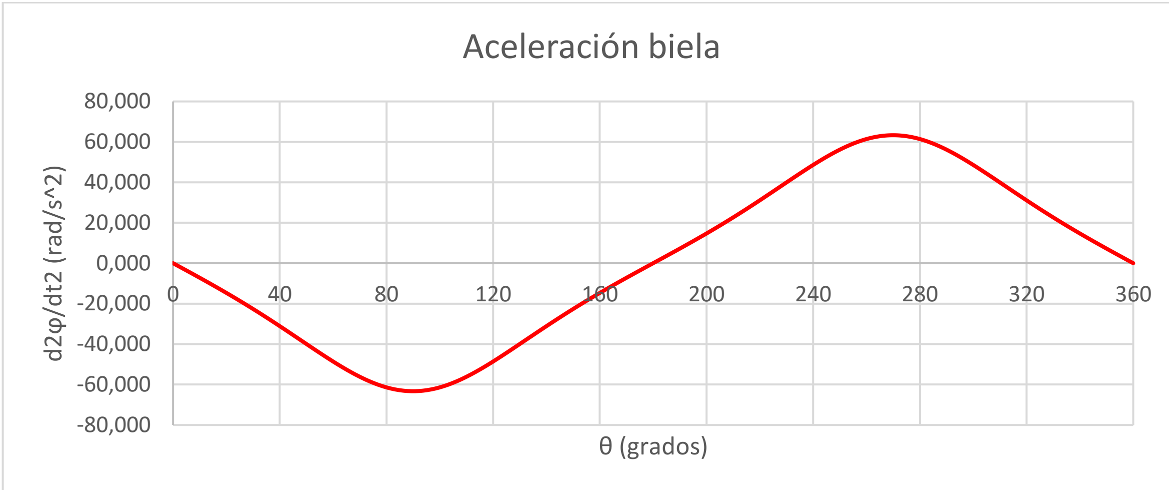

Figura 4.2. Aceleración angular de la biela para un ciclo completo.

5. ANÁLISIS CINÉTICO

Se tiene para el análisis aquí mostrado como dato de entrada que el mecanismo debe aplicar una fuerza constante F_{apl} en la corredera en toda la carrera de empuje ($180° \leq \theta \leq 360°$); así se tiene que la potencia instantánea es para una masa m_c de la corredera [2]:

$$\boxed{P = |(F_{apl} + m_c\ddot{x})\dot{x}|} \quad (9)$$

El término entre paréntesis en la ecuación (9) es la fuerza total horizontal que impulsa a la corredera, para $0° \leq \theta \leq 180°$ el término F_{apl} es nulo; considerando que la potencia se conserva (no hay pérdida de energía en el mecanismo) el torque instantáneo de entrada de la manivela AB debe ser:

$$\boxed{T = \frac{P}{\dot{\theta}}} \quad (10)$$

Ejemplo 5.1. La potencia requerida y el torque de entrada para el mecanismo de los ejemplos previos con $F_{apl} = 1000$ N, $m_c = 0.50$ kg se calculan con las ecuaciones (9) y (10) y son para un ciclo completo calculados y graficados en Excel:

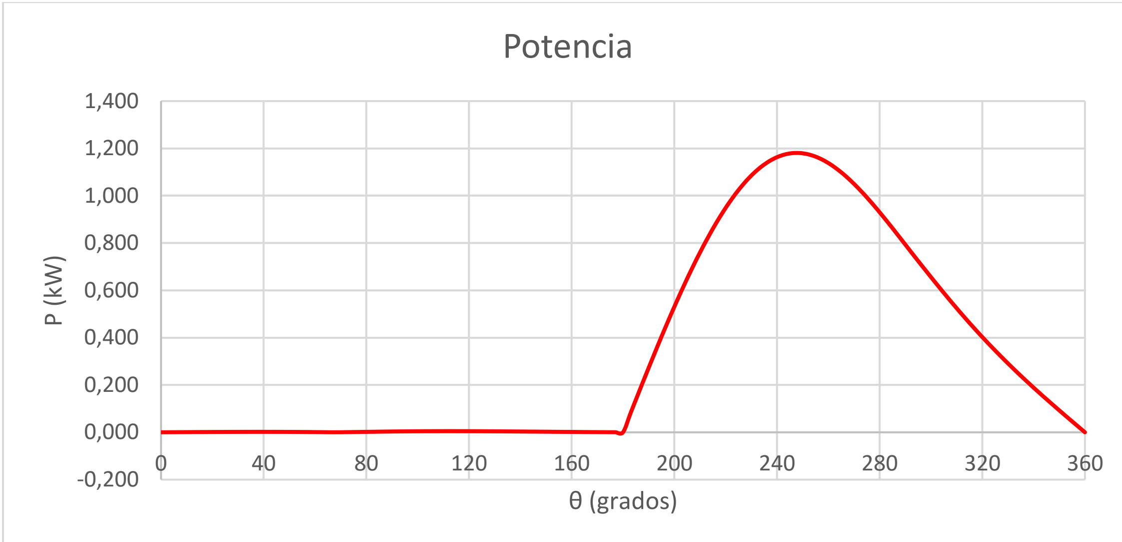

Figura 5.1. Potencia requerida instantánea para un ciclo completo.

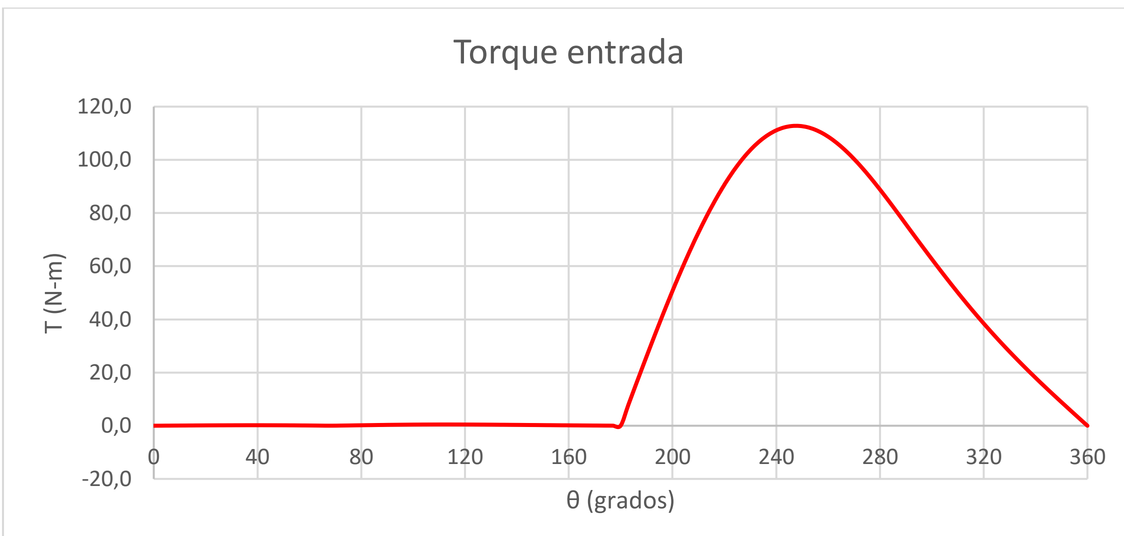

Figura 5.2. Torque de entrada instantáneo para un ciclo completo.

Las reacciones se pueden calcular con un análisis completo para cada ángulo de entrada de la manivela, sin embargo, los valores interesantes para el diseño mecánico (selección de pasadores, pernos, etc…) son las mayores reacciones, en el caso analizado las mayores cargas sobre las uniones se dan cuando $\theta = 270°$ ya que ahí es donde la manivela debe ejercer mayor torque y se dan la mayor aceleración y velocidad de la corredera al tiempo que se ejerce la fuerza aplicada; una característica interesante es que para ese ángulo de entrada siempre se tendrá $\dot{\varphi} = 0$ por lo que no hay que tener en cuenta aceleraciones centrípetas en la biela, otro detalle a tener en cuenta es que como estamos asumiendo velocidad angular de la manivela constante el momento de inercia de ésta tampoco es importante para calcular las mayores cargas.

El diagrama de cuerpo libre de manivela, biela y corredera en el punto crítico es el siguiente:

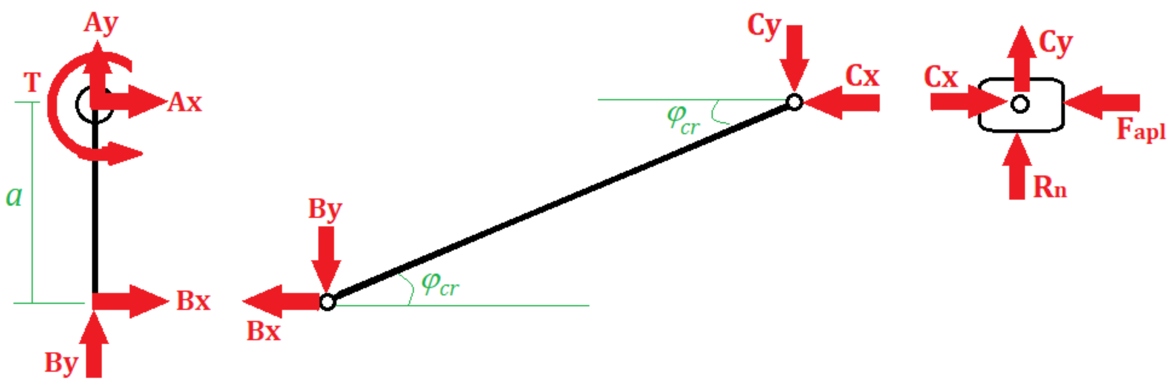

Figura 5.3. Diagrama de cuerpo libre en la posición crítica, de izquierda a derecha: manivela, biela, corredera.

En base a éste diagrama se pueden calcular las reacciones en el instante crítico.

BIBLIOGRAFÍA:

[1] Robert L. Norton. ***Dinámica de maquinaria***. McGraw Hill.

[2] Andrew Pytel, Jaan Kiusalaas. ***Ingeniería Mecánica: Dinámica***. Cengage Learning.