MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS

Análisis de deformación

Carlos Armando De Castro

INTRODUCCIÓN:

El presente escrito es parte de una serie de notas de estudio sobre Mecánica de Medios Continuos para ingenieros; presenta de una manera compacta los conceptos y las ecuaciones básicas necesarias para el estudio de esta interesante área de la Ingeniería.

CONTENIDOS:

1. DESPLAZAMIENTO

Consideremos un cuerpo continuo en una configuración de referencia $\boldsymbol{\Omega_0}$ (también llamada configuración material) que luego de un tiempo finito se deforma a la configuración $\boldsymbol{\Omega}$ como en la Figura 1.1.

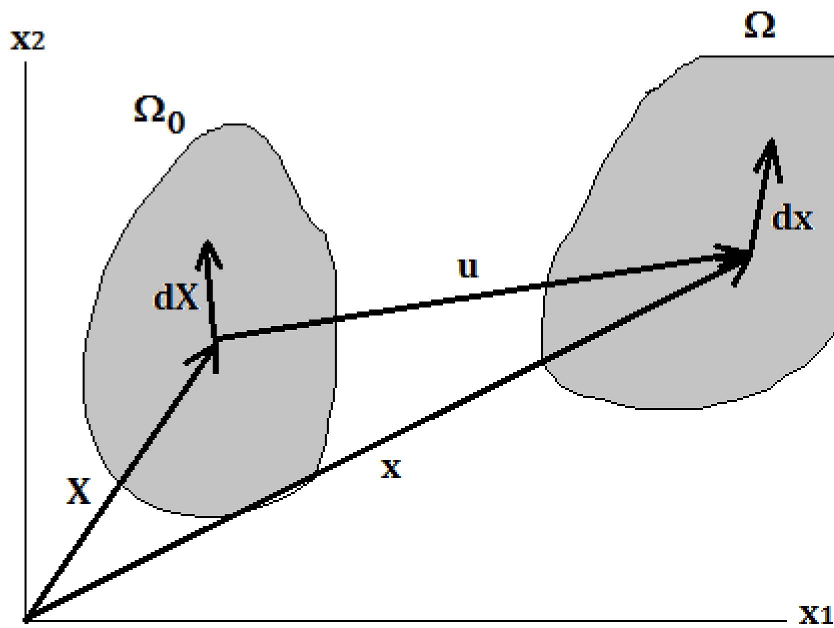

Figura 1.1. Configuración de referencia y configuración deformada mostrando las posiciones de una partícula material.

Una partícula material del cuerpo que inicialmente se encontraba en la posición **X** se encuentra ahora en la posición indicada por el vector **x**. El *desplazamiento* de la partícula respecto a la posición de referencia es la diferencia de los dos vectores de posición, y es el vector:

$$\boxed{\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}} \quad (1.1)$$

O en notación indicial:

$$\boxed{u_i = x_i - X_i} \quad (1.2)$$

2. TENSOR GRADIENTE DE DEFORMACIÓN

Consideremos ahora de la Figura 1.1 el vector diferencial de posición que va desde la partícula en **X** a otra partícula vecina, d**X**. En la posición deformada el vector diferencial de posición es d**x**. El *tensor gradiente de deformación* se define como el tensor **F** tal que:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \qquad (2.1a)$$
$$dx_i = F_{ij}dX_j \qquad (2.1b)$$

Entonces el tensor gradiente de deformación viene dado por:

$$\boxed{\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}}} \qquad (2.2)$$

En notación indicial se escribe como:

$$\boxed{F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}} \qquad (2.3)$$

El gradiente de deformación se puede representar como una matriz cuyos componentes vienen dados por (2.3). Miremos cómo se puede poner el tensor gradiente de deformación en términos de los desplazamientos. Derivando la ecuación (1.2) respecto a la configuración de referencia se tiene:

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \frac{\partial X_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \delta_{ij}$$

Identificando el primer término del lado derecho como el gradiente de deformación y reagrupando términos:

$$F_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \delta_{ij} \qquad (2.4)$$

O escrito en forma vectorial:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{X}} + \mathbf{I} \qquad (2.5)$$

El *inverso del tensor gradiente de deformación* se escribe en notación indicial:

$$\boxed{F_{ij}^{-1} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}} \qquad (2.6)$$

Miremos cómo se puede poner el inverso del tensor gradiente de deformación en términos de los desplazamientos. Derivando la ecuación (1.2) respecto a la configuración deformada se tiene:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$$

Identificando el primer término del lado derecho como el inverso del gradiente de deformación y reagrupando términos:

$$F_{ij}^{-1} = \delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (2.7)$$

O escrito en forma vectorial:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} - \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}} \quad (2.8)$$

3. TENSOR DE CAUCHY-GREEN

Consideremos ahora el cuadrado de la longitud de un segmento deformado:

$$(ds)^2 = d\mathbf{x}.d\mathbf{x} = dx_i dx_i \quad (3.1)$$

Reescribiendo el vector diferencial con la ecuación (2.1b) en términos de la configuración de referencia y utilizando el gradiente de deformación se tiene:

$$(ds)^2 = (F_{ik}dx_k)(F_{im}dx_m) = F_{ik}F_{im}dx_k dx_m$$

$$(ds)^2 = d\mathbf{X}.(\mathbf{F}^T\mathbf{F}).d\mathbf{X} \quad (3.2)$$

Se llama *tensor de deformación de Cauchy-Green* al término entre paréntesis del lado derecho de (3.2):

$$\boxed{\boldsymbol{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}} \quad (3.3)$$

En notación indicial se escribe como:

$$\boxed{C_{ij} = F_{ki}F_{kj}} \quad (3.4)$$

Para poner el tensor de deformación de Cauchy-Green en términos de los desplazamientos utilizamos (2.4) en (3.4):

$$C_{ij} = \left(\frac{\partial u_k}{\partial X_i} + \delta_{ki}\right)\left(\frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \delta_{kj}\right) = \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\delta_{kj} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j}\delta_{ki} + \delta_{ki}\delta_{kj}$$

Utilizando las propiedades de la delta de Kronecker y reagrupando términos:

$$\boxed{C_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \delta_{ij}} \quad (3.5)$$

4. TENSOR DE GREEN

Consideremos la diferencia de los cuadrados del segmento deformado y del segmento en la configuración de referencia:

$$(ds)^2 - (dS)^2 = d\mathbf{x}.d\mathbf{x} - d\mathbf{X}.d\mathbf{X} = d\mathbf{X}.(\mathbf{F}^T\mathbf{F}).d\mathbf{X} - d\mathbf{X}.d\mathbf{X} = d\mathbf{X}.(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I}).d\mathbf{X}$$

$$(ds)^2 - (dS)^2 = d\mathbf{X}.(\mathbf{C} - \mathbf{I}).d\mathbf{X} \quad (4.1)$$

Se define el *tensor de Green de deformación* como el tensor **E** tal que:

$$(ds)^2 - (dS)^2 = 2d\mathbf{X}.\mathbf{E}.d\mathbf{X} \quad (4.2)$$

Comparando (4.1) con (4.2) tenemos el tensor de Green:

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})} \quad (4.3)$$

Escribiendo (4.3) en notación indicial y utilizando la ecuación (3.5) se tiene el tensor de Green en términos de los desplazamientos:

$$\boxed{E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right)} \quad (4.4)$$

Las deformaciones principales surgen de un problema de eigenvalores:

$$(\mathbf{E} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

5. TENSOR DE CAUCHY

Consideremos la longitud de un intervalo en la configuración de referencia:

$$(dS)^2 = d\mathbf{X}.d\mathbf{X} = d\mathbf{x}.(\mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1}).d\mathbf{x} = d\mathbf{x}.\widetilde{\mathbf{B}}.d\mathbf{x} \quad (5.1)$$

Donde $\widetilde{\mathbf{B}}$ es el *tensor de deformación de Cauchy*:

$$\boxed{\widetilde{\mathbf{B}} = \mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1}} \quad (5.2)$$

En notación indicial se tiene:

$$\boxed{\tilde{B}_{ij} = F_{ki}^{-1}F_{kj}^{-1}} \quad (5.3)$$

Para poner el tensor de Cauchy en términos de los desplazamientos consideramos la ecuación (2.8) en (5.3):

$$\tilde{B}_{ij} = \left(\delta_{ki} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\left(\delta_{kj} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) = \delta_{ki}\delta_{kj} - \delta_{ki}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \delta_{kj}\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$

Por las propiedades de la delta de Kronecker se tiene:

$$\boxed{\tilde{B}_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}} \quad (5.4)$$

6. TENSOR DE EULER

Considerando la diferencia de las longitudes entre los segmentos deformado y original, se puede escribir por (5.1):

$$(ds)^2 - (dS)^2 = d\mathbf{x}.d\mathbf{x} - d\mathbf{x}.\widetilde{\mathbf{B}}.d\mathbf{x} = d\mathbf{x}.\left(\mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{B}}\right).d\mathbf{x} \quad (6.1)$$

Se define el *tensor de Euler* como el tensor $\mathbf{e}$ tal que:

$$(ds)^2 - (dS)^2 = 2d\mathbf{X}.\mathbf{e}.d\mathbf{X} \quad (6.2)$$

Comparando (6.1) y (6.2) se tiene el tensor de Euler:

$$\boxed{\mathbf{e} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{B}}\right)} \quad (6.3)$$

Para escribirlo por componentes en términos de los desplazamientos tomamos de la ecuación (5.4) en (6.3):

$$\boxed{e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)} \quad (6.4)$$

7. TENSOR DE DEFORMACIÓN INFINITESIMAL

Para deformaciones infinitesimales ("muy pequeñas") no se hace distinción entre las coordenadas de referencia y deformadas **X** y **x**. En este caso además se desprecian los términos no-lineales en el tensor de Green y en el tensor de Euler, por lo que (4.4) y (6.4) se convierten en la misma ecuación quedando el *tensor de deformación infinitesimal*:

$$\boxed{\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)} \quad (7.1)$$

En notación vectorial se escribe como:

$$\boxed{\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T]} \quad (7.2)$$

Para entender el significado del tensor de deformación infinitesimal vemos que la diferencia entre el cuadrado de las distancias deformada y original se escribe como:

$$(ds)^2 - (dS)^2 = 2d\mathbf{X}.\boldsymbol{\epsilon}.d\mathbf{X} = 2\epsilon_{ij}dX_i dX_j$$

Dividiendo por el cuadrado de la longitud original del segmento:

$$\frac{(ds)^2 - (dS)^2}{(dS)^2} = 2\epsilon_{ij}\frac{dX_i}{dS}\frac{dX_j}{dS} = 2\epsilon_{ij}n_i n_j = 2\mathbf{n}.\boldsymbol{\epsilon}.\mathbf{n} \quad (7.3)$$

Donde **n** es el vector unitario en la dirección de d**X**. Ahora, para deformaciones muy pequeñas se puede hacer la aproximación:

$$\frac{(ds)^2 - (dS)^2}{(dS)^2} \approx 2\frac{ds - dS}{dS}$$

Entonces se tiene en (7.3):

$$\frac{ds - dS}{dS} = \mathbf{n}.\boldsymbol{\epsilon}.\mathbf{n} \quad (7.4)$$

De (7.4) se deduce que $\boldsymbol{\epsilon}$ representa la deformación unitaria (por unidad de longitud) a lo largo de la dirección de d**X**.

8. DEFORMACIÓN UNITARIA Y ROTACIÓN

El gradiente de los desplazamientos puede escribirse como:

$$\nabla\mathbf{u} = \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T] + \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{u} - (\nabla\mathbf{u})^T] = \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\Omega} \quad (8.1)$$

Donde la parte simétrica es el tensor de deformación infinitesimal $\boldsymbol{\epsilon}$ y la anti-simétrica se relaciona con la rotación del cuerpo:

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{u} - (\nabla\mathbf{u})^T] \quad (8.2)$$

9. TENSOR GRADIENTE DE VELOCIDAD, TASA DE DEFORMACIÓN Y VORTICIDAD

Considerando que cada partícula material se mueve a cierta velocidad se tiene un campo vectorial de velocidades en el cuerpo, **v**. El tensor gradiente de velocidad es:

$$\mathbf{L} = \nabla\mathbf{v} \quad (9.1)$$

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (9.2)$$

El tensor gradiente de la velocidad puede descomponerse también en forma simétrica y anti-simétrica:

$$\nabla\mathbf{v} = \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T] + \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{v} - (\nabla\mathbf{v})^T] = \mathbf{D} - \mathbf{w} \quad (9.3)$$

Donde se define el tensor de tasa de deformación:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T] \quad (9.4)$$

Y el tensor de vorticidad:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{v} - (\nabla\mathbf{v})^T] \quad (9.5)$$

La relación entre el tensor de vorticidad y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ es:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{w} \quad (9.6)$$

10. REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

- J.N. Reddy. *An Introduction to Continuum Mechanics.* Cambridge University Press. 2008.
- Oliver y Agelet. *Mecánica de medios continuos para ingenieros*. Edicions UPC. 2002.
- Mase & Mase. *Continuum mechanics for engineers*. 2nd edition. CRC Press. 1999.
- José Rafael Toro Gómez. *Dinámica de fluidos con introducción a la teoría de la turbulencia*. Ediciones Uniandes. 2006.