APUNTES DE CLASES – ESTÁTICA DE CUERPOS RÍGIDOS

Carlos Armando De Castro

Asesorías en Matemáticas, Física e Ingeniería

1. VECTORES

Un vector es una cantidad que tiene *magnitud* y *dirección*. La representación típica de un vector es como una flecha en el espacio 2D o 3D, la magnitud sería la longitud de la flecha y la dirección es hacia dónde apunta.

Las coordenadas de un punto cualquiera en el espacio se pueden representar como un vector que parte del origen de un sistema de coordenadas elegido hacia el punto, como en la Fig. 1.1 que los vectores $\mathbf{r_A}$ y $\mathbf{r_B}$ son los vectores de posición de los puntos A y B respectivamente. El vector de posición relativa de B respecto a A ($\mathbf{r_{B/A}}$) es el vector que parte de A hacia B:

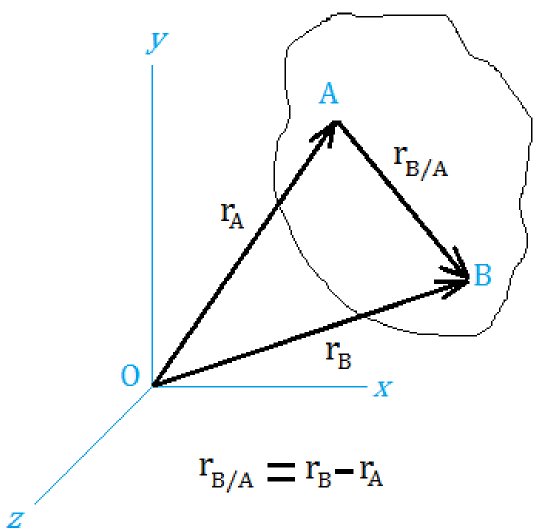

Figura 1.1. Vectores de posición absoluta y relativa.

Los vectores se escriben en términos de sus componentes sobre los ejes coordenados *x*, *y*, *z*, donde cada componente es la proyección del vector sobre el eje respectivo. Así, los vectores $\mathbf{r_A}$ y $\mathbf{r_B}$ de la Fig. 1.1 son:

$$\mathbf{r_A} = \langle x_A, y_A, z_A \rangle$$

$$\mathbf{r_B} = \langle x_B, y_B, z_B \rangle$$

La ***magnitud*** de un vector se calcula por el teorema de Pitágoras:

$$\|\mathbf{r_A}\| = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$$

La ***suma*** o resta de vectores se hace componente a componente:

$$\mathbf{r_B} + \mathbf{r_A} = \langle x_B + x_A, \quad y_B + y_A, \quad z_B + z_A \rangle$$

$$\mathbf{r_B} - \mathbf{r_A} = \langle x_B - x_A, \quad y_B - y_A, \quad z_B - z_A \rangle$$

Producto punto:

El producto punto entre dos vectores entrega como resultado un escalar (un número), se calcula como:

$$\mathbf{r_B} \cdot \mathbf{r_A} = \mathbf{r_A} \cdot \mathbf{r_B} = x_B x_A + y_B y_A + z_B z_A$$

Si el ángulo entre los vectores es β se tiene además la identidad:

$$\mathbf{r_A} \cdot \mathbf{r_B} = \|\mathbf{r_A}\| \|\mathbf{r_B}\| \cos\beta$$

Nota: *si dos vectores son perpendiculares su producto punto es cero.*

Producto cruz:

El producto cruz entre dos vectores entrega como resultado un vector perpendicular a los dos que se multiplicaron, se calcula como:

$$\mathbf{r_B} \times \mathbf{r_A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_B & y_B & z_B \\ x_A & y_A & z_A \end{vmatrix}$$

$$= \langle y_B z_A - y_A z_B, \quad x_A z_B - x_B z_A, \quad x_B y_A - x_A y_B \rangle$$

El orden del producto cruz sí importa, ya que:

$$\mathbf{r_B} \times \mathbf{r_A} = -\mathbf{r_A} \times \mathbf{r_B}$$

Si el ángulo entre los vectores es β se tiene además la identidad:

$$\|\mathbf{r_A} \times \mathbf{r_B}\| = \|\mathbf{r_A}\|\|\mathbf{r_B}\| \sin \beta$$

Nota: *si dos vectores son paralelos o anti-paralelos su producto cruz es cero*.

Vectores unitarios directores:

Un vector unitario director es un vector de magnitud igual a 1 que indica la dirección en la que actúa un vector en particular. En la Fig. 1.1 el vector unitario director que va de A hacia B (de $\mathbf{r_{B/A}} = \mathbf{r_{AB}}$) es:

$$\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{AB}} = \frac{\mathbf{r_{AB}}}{\|\mathbf{r_{AB}}\|}$$

Si se conoce la magnitud de un vector que actúa en una dirección dada se puede sacar el vector completo (cada componente) multiplicado la magnitud conocida por el vector unitario director.

2. FUERZAS Y LEYES DE NEWTON

Una ***fuerza*** es la acción sobre un cuerpo que intenta cambiar su estado de inercia, es decir, hacerlo mover desde un estado de reposo ó cambiar su velocidad y/o trayectoria, como las fuerzas tienen magnitud y dirección son vectores y todas las operaciones de vectores mencionadas anteriormente aplican a ellas. La unidad en el sistema internacional de la fuerza es el Newton (1 N = 1 kg.m/s^2), en el sistema inglés se utiliza la libra (1 lb = 4.44822 N).

Leyes de Newton:

Las leyes de Newton sobre las fuerzas son las siguientes:

1- Todo cuerpo tiende a seguir en el estado que se encuentra, sea en reposo o andando en línea recta a velocidad constante (inercia).
2- Para cambiar el estado de un cuerpo se necesita una acción conocida como fuerza, que es proporcional a la masa del cuerpo, y la resultante de esa fuerza genera un cambio de velocidad: **F** = *m***a**.
3- Toda fuerza que actúa sobre un cuerpo es sentida por el otro cuerpo que la ejerce con la misma magnitud y en sentido contrario (acción y reacción).

Tipos de fuerzas:

Los siguientes son los tipos de fuerzas comunes en problemas de mecánica de sólidos rígidos, no son todos los tipos de fuerzas posibles:

Peso: es debido a la atracción gravitacional de la Tierra sobre los cuerpos, para un cuerpo con masa m (kg) el peso es

$$W = mg$$

Donde g es la aceleración gravitacional terrestre (g = 9.81 m/s^2 = 32 ft/s^2); el peso siempre apunta hacia el centro de la Tierra (hacia "abajo").

Tensión: es la fuerza debida a cables y cuerdas, tiene la característica de que actúa a lo largo del cable y siempre hala a los cuerpos sobre los que actúa.

Fuerzas de contacto: son las que se producen por contacto entre cuerpos.

Fuerzas de reacción: son debidas a apoyos de un cuerpo, siempre se dan en las direcciones en las cuales se restringe el movimiento del cuerpo.

Fuerzas de fricción: son debidas a las rugosidades que existen entre las superficies, siempre se oponen al movimiento existente o al posible movimiento.

3. MOMENTO DE UNA FUERZA Y PARES DE TORSIÓN

El ***momento*** de una fuerza es la acción que ésta hace y que tienda a hacer girar al cuerpo sobre el que actúa, ésta cantidad depende del punto desde donde se tome el *brazo* de la fuerza. Los momentos son vectores también, donde cada componente del vector representa la tendencia a girar alrededor del eje correspondiente a la componente. Considere la situación de la Fig. 3.1:

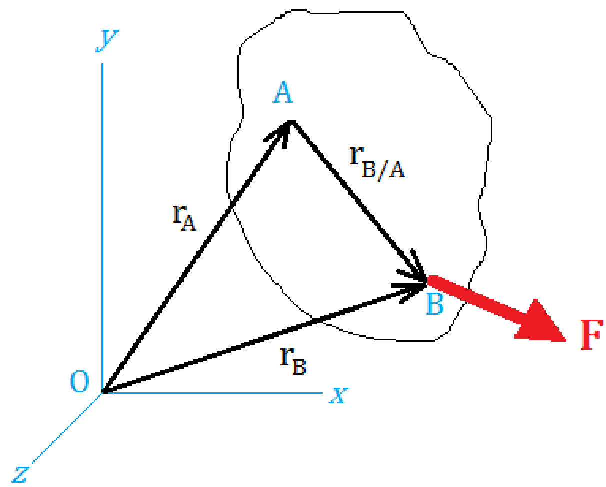

Figura 3.1. Fuerza actuando sobre un cuerpo rígido en el punto B.

El momento de la fuerza F alrededor del origen es:

$$\boxed{\mathbf{M_O} = \mathbf{r_B} \times \mathbf{F}}$$

El momento de esa misma fuerza F alrededor del punto A es:

$$\boxed{\mathbf{M_A} = \mathbf{r_{B/A}} \times \mathbf{F}}$$

Como se puede ver éstas cantidades son diferentes para cada punto. El momento de la fuerza alrededor del punto B es cero ya que es el mismo punto sobre el que actúa.

<u>**Nota:**</u> *si una fuerza actúa sobre un punto o su línea de acción pasa por el punto entonces el momento de esa fuerza sobre el punto es cero.*

Si sobre un cuerpo actúan varias fuerzas el momento total es la suma vectorial del momento de cada fuerza calculado independientemente.

En dos dimensiones el análisis de los momentos es más fácil ya que se puede observar cómo va a tender a girar el cuerpo, se considera positivo si es anti-horario y negativo si es horario; además, si el ángulo entre el brazo y la fuerza es θ (como se muestra en la Fig. 3.2) la magnitud del momento es:

$$M = rF\sin\theta$$

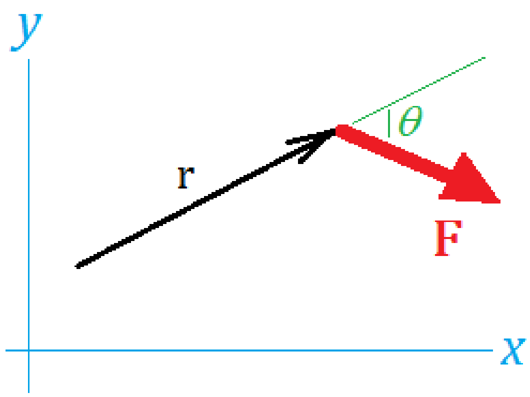

Figura 3.2. Momento de una fuerza en dos dimensiones.

Las unidades del momento son N.m en el sistema internacional o lb-in ó lb-ft en el sistema inglés.

Pares de torsión:

Un par de torsión es una pareja de fuerzas anti-paralelas de igual magnitud, las cuales se contrarrestan como fuerza pero generan un momento

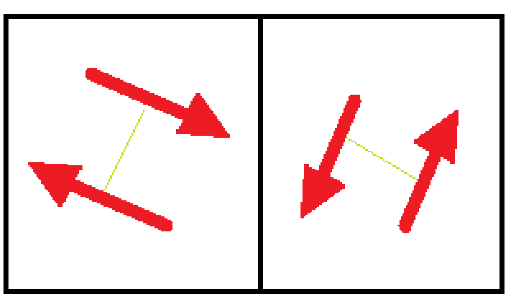

Figura 3.3.a. Pares de torsión.

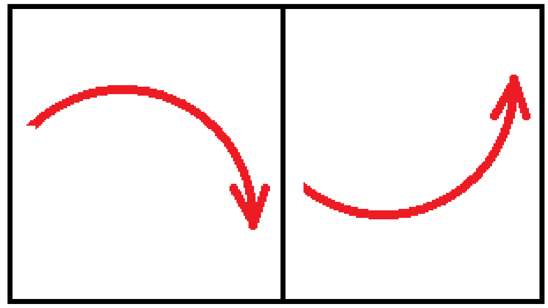

Figura 3.3.b. Pares de torsión equivalentes a la Fig. 3.3.a.

En dos dimensiones el par de torsión se calcula como

$$M = Fd$$

Donde F es el valor de cada fuerza y d es la distancia perpendicular entre las fuerzas del par. En tres dimensiones un par se representa como un vector con doble flecha (ver Figura 4.1).

<u>**Nota:**</u> *todos los puntos del cuerpo sienten el par de torsión, por eso se dice que es libre del punto de acción.*

Momento alrededor de un eje:

Si se desea calcular el momento de una fuerza alrededor de un eje dado (como por ejemplo si hay bisagras a lo largo del eje de interés) primero se debe calcular el momento de la fuerza alrededor del origen y luego proyectarlo a lo largo del eje haciendo producto punto con el vector unitario director del eje:

$$\mathbf{M_O} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$\boxed{M_{eje} = \mathbf{M_O} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{eje}}}$$

4. RESULTANTE DE SISTEMAS DE FUERZAS Y PARES

Considere un cuerpo sujeto a varias fuerzas y pares de torsión (Fig. 4.1), todo se puede reemplazar por una fuerza y un par resultantes actuando en un punto dado (Fig. 4.2), donde la fuerza resultante es la suma vectorial de todas las fuerzas y el par resultante es la suma vectorial de todos los pares y de los momentos de cada fuerza alrededor del punto:

$$\boxed{\mathbf{F_R} = \sum \mathbf{F_i}}$$

$$\boxed{\mathbf{M_R} = \sum \mathbf{M_{pares}} + \sum \mathbf{r_i} \times \mathbf{F_i}}$$

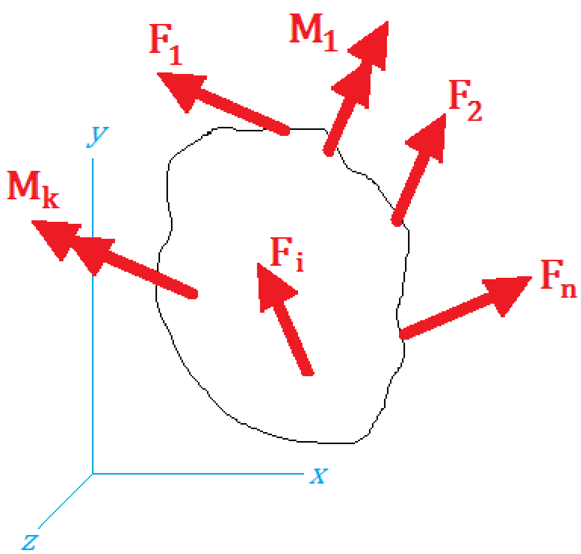

Figura 4.1. Fuerzas y pares de torsión actuando sobre un cuerpo.

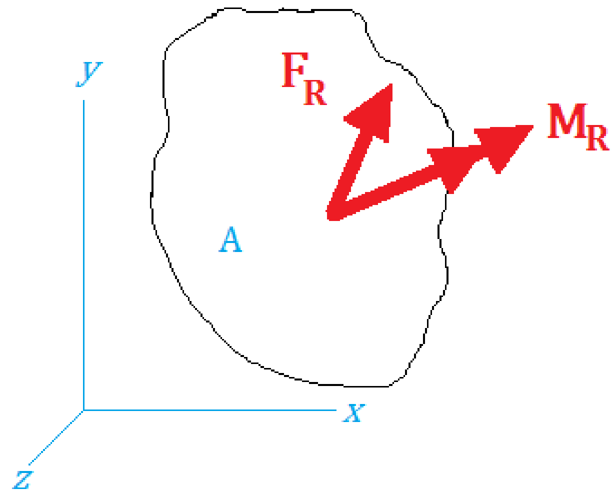

Figura 4.2. Sistema equivalente al de la Fig. 4.1 actuando sobre un punto del cuerpo.

5. EQUILIBRIO DE CUERPOS RÍGIDOS

Un cuerpo está en equilibrio estático cuando la resultante de fuerzas y momentos alrededor de cualquier punto es cero en todas las componentes, por lo tanto las *condiciones de equilibrio* son las siguientes:

$$\boxed{\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}}$$

$$\boxed{\sum \mathbf{M} = \mathbf{0}}$$

En dos dimensiones las condiciones de equilibrio dan tres ecuaciones y en tres dimensiones dan seis ecuaciones:

$$2D: \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$$

$$3D:\begin{cases}\sum F_x = 0\\ \sum F_y = 0\\ \sum F_z = 0\\ \sum M_x = 0\\ \sum M_y = 0\\ \sum M_z = 0\end{cases}$$

Para hacer el análisis completo de equilibrio de un cuerpo hay que tener en cuenta las fuerzas que hay en los apoyos.

Reacciones de apoyos:

Todo apoyo ejerce una fuerza de reacción en la componente en la cual impide el movimiento lineal y además un par de reacción alrededor del eje sobre el cual impida girar. En las direcciones donde no hay restricción no hay reacciones (ver Fig. 5.1). Las reacciones son las incógnitas de las ecuaciones de equilibrio.

Indeterminación estática:

Un cuerpo es estáticamente indeterminado si hay más incógnitas (reacciones) que ecuaciones disponibles al establecer las condiciones de equilibrio.

Inestabilidad:

Un cuerpo es inestable si los apoyos que tiene son insuficientes para garantizar el equilibrio del mismo en todas las direcciones o a posibles fuerzas que no estén siendo consideradas en el análisis pero que podrían aparecer en la aplicación real; es decir, si hay más ecuaciones de equilibrio que incógnitas (reacciones) el cuerpo es inestable.

Cuerpos de dos fuerzas

Para que un cuerpo en el que sólo actúan dos fuerzas esté en equilibrio las fuerzan deben ser colineales, de sentido opuesto y de igual magnitud.

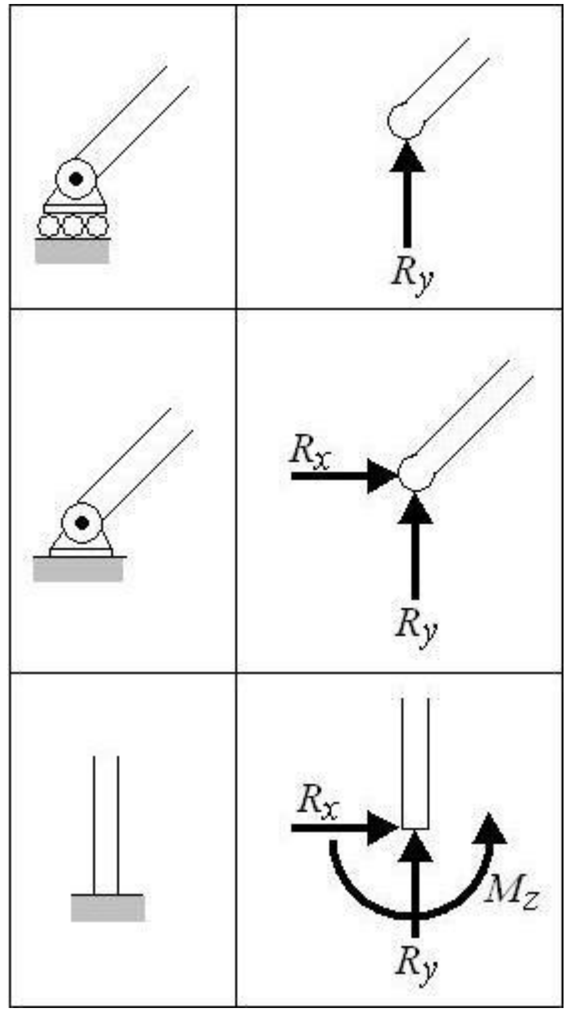

Figura 5.1. Ejemplos de reacciones en apoyos.

Cuerpos de tres fuerzas

Para que un cuerpo en el que actúan tres fuerzas esté en equilibrio las fuerzan deben apuntar hacia el mismo punto (no necesariamente dentro del cuerpo) y cumplir la condición de equilibrio.

PROCEDIMIENTO PARA RESOLVER PROBLEMAS DE EQUILIBRIO

1) Dibujar el diagrama de cuerpo libre del cuerpo o cuerpos involucrados en el problema.
2) En base al diagrama descomponer las fuerzas y momentos para escribir los vectores de cada uno.
3) Aplicar las condiciones de equilibrio para cada cuerpo:

$$\boxed{\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}}$$
$$\boxed{\sum \mathbf{M} = \mathbf{0}}$$

4) Resolver el sistema de ecuaciones que resulta de las condiciones de equilibrio.
5) Si alguna fuerza da con signo negativo en la solución es indicación de que va en la dirección contraria a la que se asumió en el diagrama de cuerpo libre.

Consejos

- Inicie por la ecuación de equilibrio de momentos alrededor del punto que tenga más fuerzas incógnitas, con esto puede resolver más rápido el sistema.

- Se recomienda repasar métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales para tener más agilidad a la hora de resolver problemas de equilibrio de cuerpos rígidos.

6. CERCHAS

Una ***cercha*** es una estructura conformada por barras unidas por medio de pasadores, las uniones de las barras reciben el nombre de ***nodos*** de la cercha. La característica de las cerchas es que las cargas sobre ella actúan únicamente sobre los nodos, lo que hace que cada barra que conforma la cercha sea un cuerpo de dos fuerzas que se encuentra a *tensión* o a *compresión*.

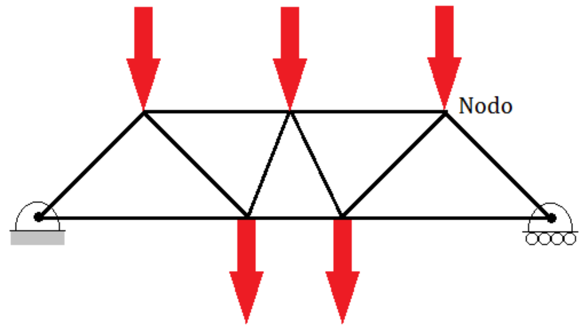

Figura 6.1. Ejemplo de una cercha.

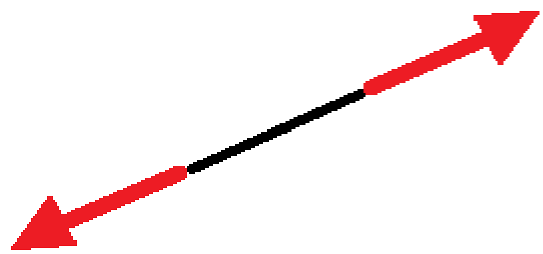

Figura 6.2. Elemento a tensión.

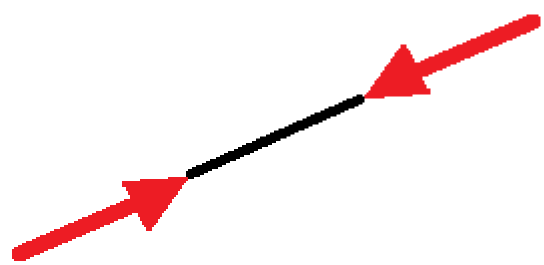

Figura 6.3. Elemento a compresión.

Analizar una cercha es calcular todas las fuerzas en sus miembros estructurales, para hacer eso primero hay que calcular las reacciones en los apoyos haciendo equilibrio de la cercha completa, una vez se conozcan las reacciones se hace equilibrio para cada nodo asumiendo que las fuerzas de los elementos de la cercha están a tensión (si da negativa la respuesta es que está a compresión).

Para cada nodo sólo se puede hacer sumatoria de fuerzas en x y en y, por tanto salen 2 ecuaciones por nodo lo que da un número de ecuaciones de $2N$ para N nodos en la cercha.

7. MÁQUINAS Y MARCOS

Un marco o máquina se diferencia de una cercha en que las cargas no están necesariamente sobre las uniones de los elementos. La forma de analizar el equilibrio y las reacciones de un marco es separando los elementos que lo conforman y analizando cada uno por aparte, teniendo en cuenta la tercera ley de Newton de acción y reacción al separar cada cuerpo.

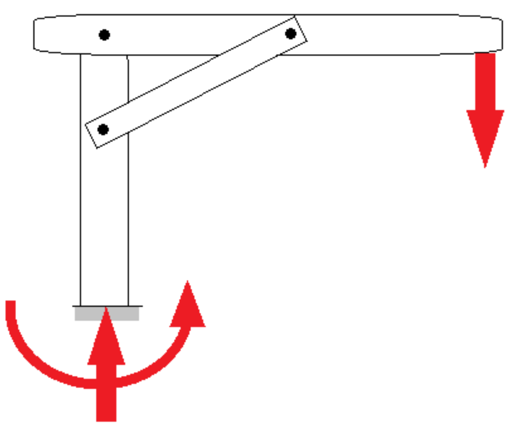

Figura 7.1. Ejemplo de un marco, con la carga externa en la punta y las reacciones en el empotramiento.

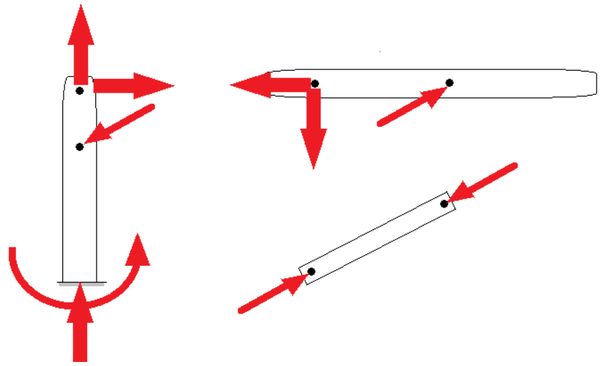

Figura 7.2. El marco de la Fig. 7.1 con sus elementos separados (nótese cómo cambia el sentido de las reacciones en cada cuerpo unido a otro).

¿Desea más profundización y ejemplos prácticos?

Contáctenos para una clase personalizada.