

Cargas combinadas – Esfuerzos principales

Carlos Armando De Castro P.

1. Introducción

Luego de hacer los análisis para hallar los esfuerzos internos en el punto crítico de un elemento mecánico, debe analizarse el estado de esfuerzos en el punto crítico para luego proceder a diseñar la pieza o determinar si un elemento ya diseñado fallará por la acción de las cargas externas.

2. El tensor de esfuerzos

Considere un elemento infinitesimal tridimensional bajo la acción de esfuerzos:

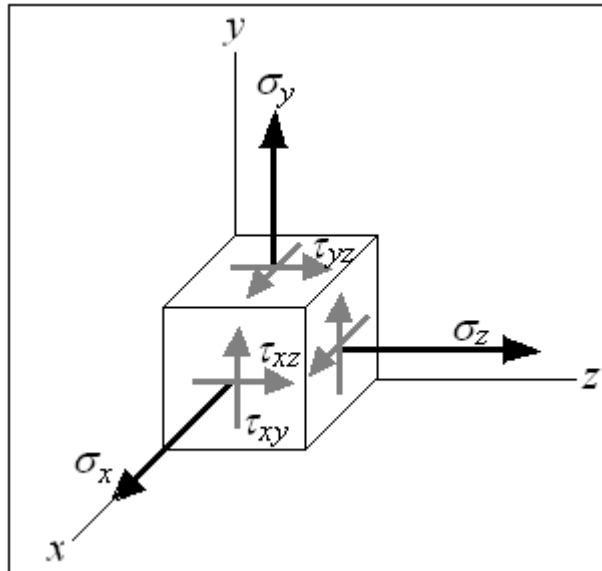


Figura 2.1. Elemento tridimensional bajo la acción de esfuerzos.

Sobre el elemento actúan tres esfuerzos normales y seis esfuerzos cortantes sobre las caras. El estado de esfuerzos en el elemento es descrito mediante una matriz de 3×3 denominada el *tensor de esfuerzos*:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

El tensor de esfuerzos es simétrico debido a que los esfuerzos cortantes cruzados deben ser iguales para garantizar equilibrio del elemento. En el caso bidimensional:

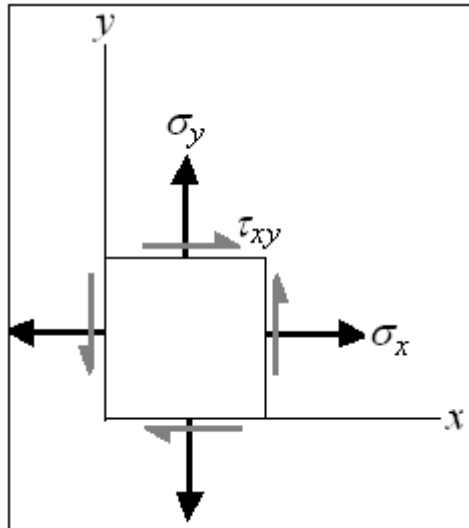


Figura 2.2. Elemento bidimensional bajo la acción de esfuerzos.

Sobre el elemento actúan dos esfuerzos normales y dos esfuerzos cortantes sobre las caras. Los esfuerzos cortantes son iguales para garantizar equilibrio del elemento, el tensor de esfuerzos en este caso es entonces:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

El caso bidimensional es generalmente el hallado en los problemas de diseño mecánico.

3. Esfuerzos principales

Los esfuerzos principales son los mayores esfuerzos que actúan sobre el elemento y se hallan por medio de una rotación de coordenadas. Los esfuerzos normales principales se notan como $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, donde $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, y en el ángulo de rotación en el que se dan el esfuerzo cortante es cero. El esfuerzo cortante máximo absoluto se nota como τ_{\max} y en el ángulo de rotación al que se da los esfuerzos normales son el promedio de los esfuerzos normales del tensor de esfuerzos.

Los esfuerzos normales principales son los eigenvalores o valores propios del tensor de esfuerzos. En el caso tridimensional, debe resolverse la ecuación

$$\det \begin{bmatrix} \sigma - \sigma_x & -\tau_{xy} & -\tau_{xz} \\ -\tau_{xy} & \sigma - \sigma_y & -\tau_{yz} \\ -\tau_{xz} & -\tau_{yz} & \sigma - \sigma_z \end{bmatrix} = 0 \quad (3.1)$$

Los esfuerzos principales son las tres raíces de 3.1. El esfuerzo cortante máximo absoluto es:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (3.2)$$

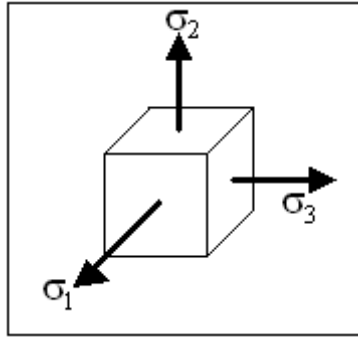


Figura 3.1. Esfuerzos principales tridimensionales.

Para el caso bidimensional, los valores propios del tensor de esfuerzos se hallan de:

$$\det \begin{bmatrix} \sigma - \sigma_x & -\tau_{xy} \\ -\tau_{xy} & \sigma - \sigma_y \end{bmatrix} = 0$$

$$(\sigma - \sigma_x)(\sigma - \sigma_y) - \tau_{xy}^2 = 0$$

$$\sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma + (\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2) = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática resulta:

$$\sigma = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

(3.3)

Los esfuerzos principales σ_1, σ_3 se hallan de 3.3 y son:

$$\sigma_1 = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

(3.4)

$$\sigma_3 = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

(3.5)

Y $\sigma_2 = 0$. El esfuerzo cortante máximo absoluto es:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

(3.6)

4. El círculo de Mohr

El ingeniero Otto Mohr propuso un método gráfico para hallar los esfuerzos principales basándose en las ecuaciones 3.4 a 3.6. Viendo las ecuaciones 3.4 y 3.5, vemos que los esfuerzos principales pueden escribirse como el esfuerzo promedio sumándole o restándole un valor:

$$\sigma_{1,3} = \sigma_{prom} \pm R \quad (4.1)$$

Donde:

$$\sigma_{prom} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

De la ecuación 3.6 vemos que el esfuerzo cortante máximo absoluto es

$$\tau_{max} = R \quad (4.2)$$

Un círculo con centro en σ_{prom} y radio R muestra todas las locaciones de esfuerzos que se dan rotando el elemento y además los esfuerzos principales. Tal círculo es llamado círculo de Mohr:

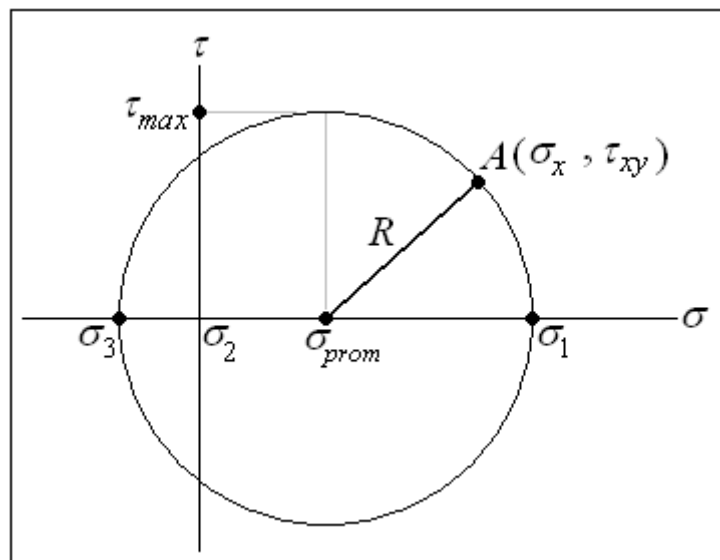


Figura 4.1. Círculo de Mohr.