Esfuerzos en elementos de máquinas y estructurales

Carlos Armando De Castro P.

1. Introducción

Una vez que se han hallado las fuerzas internas en una viga, elemento de máquina o elemento estructural, debe procederse a hallar los esfuerzos internos, los cuales serán la base para diseñar un elemento o determinar si uno ya diseñado fallará bajo las cargas que se le apliquen.

En el presente escrito se mostrarán los esfuerzos debidos a carga axial, momento flector, par de torsión y esfuerzos en tanques cilíndricos y esféricos.

2. Carga axial

Considere en elemento con área transversal *A* sometido a una carga axial *P*:

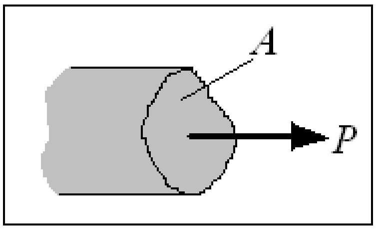

Figura 2.1. *Elemento sometido a carga axial.*

La distribución del esfuerzo es uniforme sobre el área transversal, entonces:

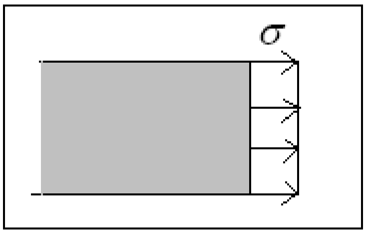

Figura 2.2. *Distribución de esfuerzos debido a carga axial.*

$$\boxed{\sigma_x = \frac{P}{A}}$$

(2.1)

En forma diferencial, si dF_x es el diferencial de la fuerza normal sobre el diferencial de área dA, el esfuerzo es:

$$\sigma_x = \frac{dF_x}{dA} \quad (2.2)$$

3. Momento flector

Considere un elemento diferencial de área *dA* en la sección transversal de un elemento a una altura *y* sobre el eje neutro (el eje neutro es el eje alrededor del cual actúa el momento flector, generalmente, se localiza en la misma posición del centroide del área transversal) sobre el que actúa un momento flector positivo *M*:

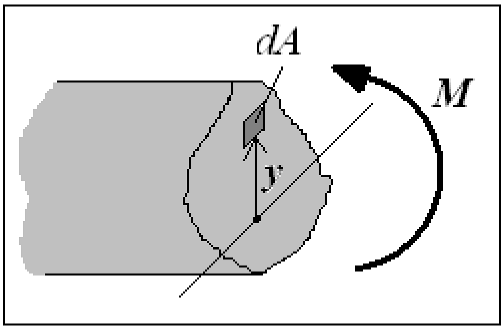

Figura 3.1. *Sección transversal sometida a momento flector.*

Como puede verse de la figura 3.1, el diferencial de fuerza axial sobre *dA* debido al momento flector es:

$$dF_x = -\frac{dM}{y} \quad (3.1)$$

De la ecuación 2.2 sabemos que el diferencial de fuerza se relaciona con el esfuerzo axial como $dF_x = \sigma_x dA$, entonces en 3.1:

$$\sigma_x dA = -\frac{dM}{y}$$

Multiplicando a ambos lados por y^2:

$$\sigma_x y^2 dA = -ydM$$

Integrando, y como *y* no depende de *M*:

$$\sigma_x \int y^2 dA = -y \int dM$$

$$\sigma_x = \frac{-My}{\int y^2 dA}$$

La integral $\int y^2 dA$ se reconoce como el momento de inercia (o segundo momento de área) alrededor del eje neutro, notado como I_x o simplemente *I*, entonces tenemos que el momento flector produce a una altura *y* del eje neutro un esfuerzo axial igual a:

$$\boxed{\sigma_x = \frac{-My}{I}}$$

(3.2)

La distribución del esfuerzo axial debido al momento flector es de la forma:

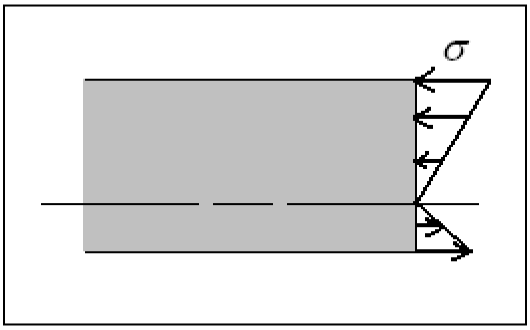

Figura 3.2. *Distribución de esfuerzos axiales debido a un momento flector.*

El mayor esfuerzo se presentará en el borde del área transversal debido a que ahí se tiene la mayor altura sobre el eje neutro, notándola como *c*, tenemos que el esfuerzo axial máximo debido a momento flector es:

$$\boxed{(\sigma_x)_{\max} = \frac{-Mc}{I}}$$

(3.3)

Como en el diseño de utilizan los valores máximos del esfuerzo, debe usarse la ecuación 3.3 para analizar o diseñar vigas, ejes y otros elementos sometidos a flexión.

4. Par de torsión

Considere un elemento diferencial de área *dA* en la sección transversal de un elemento a una distancia *r* sobre el centro del área transversal sobre el que actúa un par de torsión *T*:

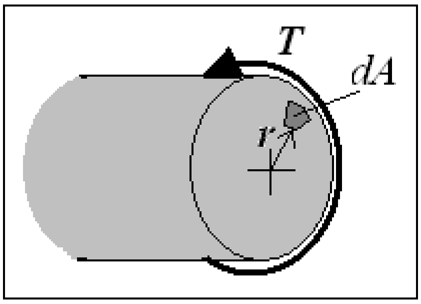

Figura 4.1. *Sección transversal sometida a par de torsión.*

El diferencial de fuerza cortante *dV* que actúa sobre el área *dA* es:

$$dV = \frac{dT}{r} \quad (4.1)$$

El diferencial de fuerza cortante está relacionado con el esfuerzo cortante τ por medio de la relación $dV = \tau\, dA$ cuando el cortante actúa directamente en la cara del área transversal como en éste caso, entonces en la ecuación 4.1:

$$\tau \, dA = \frac{dT}{r}$$

Multiplicando a ambos lados por r^2:

$$\tau \, r^2 dA = rdT$$

Integrando, y como r no depende de T:

$$\tau \int r^2 dA = r \int dT$$

$$\tau = \frac{Tr}{\int r^2 dA}$$

La integral $\int r^2 dA$ se reconoce como el momento polar de inercia, notado como J, entonces tenemos que el par de torsión produce a una distancia r del centro del área un esfuerzo cortante igual a:

$$\boxed{\tau = \frac{Tr}{J}}$$

(4.2)

La distribución del esfuerzo cortante debido al par de torsión es de la forma:

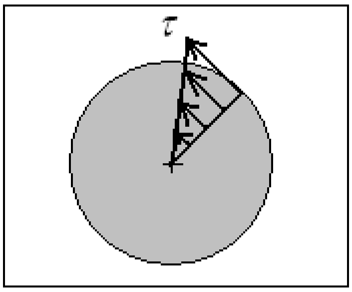

Figura 4.2. *Distribución de esfuerzos cortantes debidos a un par de torsión.*

El mayor esfuerzo se presentará en el borde del área transversal debido a que ahí se tiene la mayor distancia hasta el centro del área, notándola como c, tenemos que el esfuerzo cortante máximo debido al par de torsión es:

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{Tc}{J}}$$

(4.3)

Como en el diseño de utilizan los valores máximos del esfuerzo, debe usarse la ecuación 4.3 para analizar o diseñar ejes y otros elementos sometidos a torsión.

5. Fuerza cortante

Considere un elemento diferencial de volumen con una sección transversal con altura *dy*, espesor *t* y con profundidad *dx* a una altura *y* del eje neutro sobre el que actúa una fuerza cortante *V*:

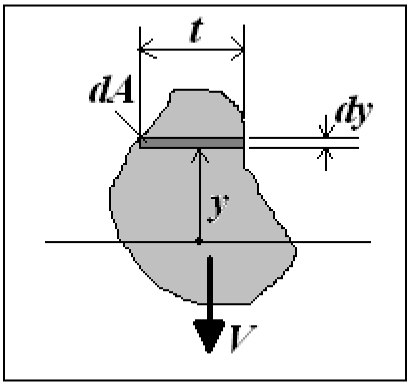

Figura 5.1. *Fuerza cortante actuando sobre un área transversal.*

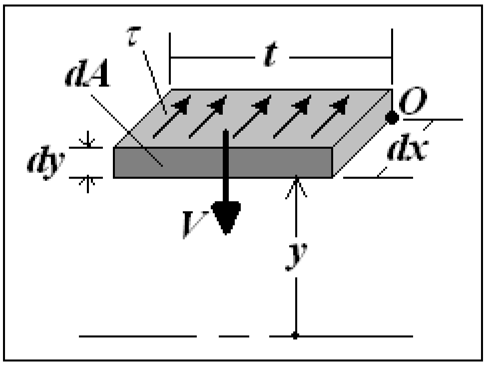

Figura 5.2. *Elemento diferencial de volumen con el esfuerzo cortante actuando sobre la superficie superior.*

El esfuerzo cortante actúa sobre la cara superior del elemento para que la suma de momentos alrededor del punto *O* sea igual a cero para garantizar el equilibrio del elemento de volumen. Puede verse notarse inmediatamente que en los bordes superior e inferior de la pieza el esfuerzo cortante es cero ya que no hay otra superficie que haga el par acción-reacción que haga que el elemento diferencial esté en equilibrio.

Haciendo un equilibrio de momentos alrededor de *O* con los diferenciales de fuerza que actúan sobre el elemento tenemos:

$$(dV)(dx) - \tau(t\,dx)(dy) = 0$$

Cancelando los *dx* y reagrupando:

$$dV = \tau\, t dy$$

Integrando:

$$\int dV = \tau\, t \int dy$$

$$V = \tau\, ty$$

Multiplicando ambos lados por ydA:

$$VydA = \tau t y^2 dA$$

Integrando:

$$V\int ydA = \tau t\int y^2 dA$$

$$\tau = \frac{V\int ydA}{t\int y^2 dA}$$

La integral $\int y^2 dA$ es el momento de inercia alrededor del eje neutro I, la integral $\int ydA$ es llamada el primer momento de área sobre el eje neutro y notada como Q, entonces el esfuerzo cortante es:

$$\boxed{\tau = \frac{VQ}{It}}$$

(5.1)

El esfuerzo cortante producido por V es máximo sobre el eje neutro. En vigas en I, el esfuerzo cortante máximo se aproxima como

$$\tau \approx \frac{V}{A_{alma}} \quad (5.2)$$

Para secciones circulares sólidas, la ecuación 5.1 entrega el resultado para el esfuerzo cortante máximo:

$$\boxed{\tau = \frac{4V}{3A}}$$

(5.3)

Para secciones rectangulares sólidas, la ecuación 5.1 entrega el resultado para el esfuerzo cortante máximo:

$$\boxed{\tau = \frac{3V}{2A}}$$

(5.4)