ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS

Carlos Armando De Castro
Asesorías en Matemáticas, Física e Ingeniería

Una ecuación diferencial de primer orden es *exacta* cuando al ponerla de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad (1)$$

Se cumple la siguiente condición:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (2)$$

Si la condición dada por la ecuación (2) no se cumple entonces la ecuación no es exacta aunque en ciertos casos particulares (que no veremos aquí) se puede convertir en una. La solución de una ecuación diferencial exacta es una expresión de la forma:

$$f(x,y) = C \quad (3)$$

Donde C es la constante que se calcula de acuerdo con las condiciones iniciales de cada problema particular. La solución se consigue integrando M y N respecto a sus diferenciales:

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y)$$

$$f(x,y) = \int N(x,y)dy + h(x)$$

Donde *g(y)* es un término que depende únicamente de *y*, *h(x)* es un término que depende únicamente de *x*. La expresión final de $f(x,y)$ se da al comparar las dos integraciones, sumando los términos que no se repiten y los que se repitan (que son los términos que dependen de *x* e *y* en cada integral) se suman una única vez.

¿De dónde sale la solución de las ecuaciones diferenciales exactas?

Del Cálculo de varias variables se sabe que una función de dos variables $z = f(x, y)$ tiene un diferencial (variación total) igual a:

$$dz = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy$$

Para un valor constante $f(x, y) = C$ la diferencial es cero (ya que una constante no varía) por lo que se tiene:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy = 0$$

Se reconoce de ahí que:

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} \quad , \quad N = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Además, para toda función de dos variables las derivadas cruzadas son iguales:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

De donde se reconoce la condición para que una ecuación diferencial de primer orden sea exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Ejemplo solución general:

Resolver la ecuación diferencial no lineal:

$$(x^2 + y^3)\frac{dy}{dx} = x^2 - 2xy$$

Solución: Pasando el diferencial de *x* a multiplicar:

$$(x^2 + y^3)dy = (x^2 - 2xy)dx$$

Pasando al mismo lado las expresiones:

$$-(x^2 - 2xy)dx + (x^2 + y^3)dy = 0$$

Distribuyendo el signo negativo y cambiando el orden de lo que acompaña a dx:

$$(2xy - x^2)dx + (x^2 + y^3)dy = 0$$

Tenemos la ecuación en la forma (1), en éste caso entonces:

$$M(x,y) = 2xy - x^2$$

$$N(x,y) = x^2 + y^3$$

Sacando las derivadas parciales:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

Por lo tanto la ecuación es exacta, entonces integramos M:

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx = \int (2xy - x^2)dx = x^2y - \frac{1}{3}x^3 + g(y)$$

Donde *g(y)* es un término que depende únicamente de y. Integrando N:

$$f(x,y) = \int N(x,y)dy = \int (x^2 + y^3)dy = x^2y + \frac{1}{4}y^4 + h(x)$$

Donde *h(x)* es un término que depende únicamente de x. Vemos comparando ambas integraciones que $g(y) = \frac{1}{4}y^4$, $h(x) = -\frac{1}{3}x^3$ (términos que no se repiten en las integraciones) y el término que aparece en ambas integraciones es x^2y por lo que se pone una sola vez, entonces la solución es:

$$\boxed{x^2y - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}y^4 = C}$$