

# **Análisis de la dinámica y el desempeño de una motocicleta**

Carlos Armando De Castro

## **RESUMEN**

En este artículo se modela matemáticamente la dinámica de una motocicleta en carreteras rectas inclinadas así como la dinámica de las curvas (velocidad máxima y ángulo de inclinación de la moto). En base a la dinámica se calcula el desempeño de la moto (velocidad máxima, aceleración máxima) de acuerdo a especificaciones de motor y transmisión dadas por medio de las ecuaciones implementadas en Excel.

**Palabras clave:** dinámica, motocicleta, Excel, fricción, movimiento circular, potencia, física mecánica.



Loma Colorada en el Cesar, Colombia, con la Sierra Nevada de Santa Marta de fondo.

## **1. INTRODUCCIÓN**

Viajar en moto es junto a volar uno de los grandes placeres de la vida, por lo tanto hay pocos casos de estudio más interesantes que éste para mostrar las aplicaciones de la Física Mecánica (Dinámica) al mundo real, junto con las soluciones numéricas de las ecuaciones algebraicas y diferenciales que sirven para solucionar y analizar los modelos matemáticos resultantes.

## 2. MODELO MATEMÁTICO VÍA RECTA

El modelo matemático se basa en las leyes de Newton para cuerpos bajo la acción de diferentes fuerzas, teniendo en cuenta la resistencia a la rodadura de las ruedas, la resistencia del aire y el peso de la moto.

El diagrama de cuerpo libre de la moto en una vía plana y recta se muestra en la Figura 2.1, donde  $mg$  es el peso de la moto con sus pasajeros y carga,  $T$  es el empuje que hace la rueda trasera impulsada por el motor de la moto,  $D$  es la resistencia del aire,  $N$  es la reacción de las llantas con la vía y  $F$  es la fuerza de resistencia a la rodadura de cada rueda (los subíndices  $t$  y  $d$  indican rueda trasera y delantera respectivamente),  $\theta$  es el ángulo de inclinación de la vía medido desde la horizontal (valores positivos indican que la moto va subiendo, valores negativos indican descenso,  $\theta = 0$  es una carretera plana).

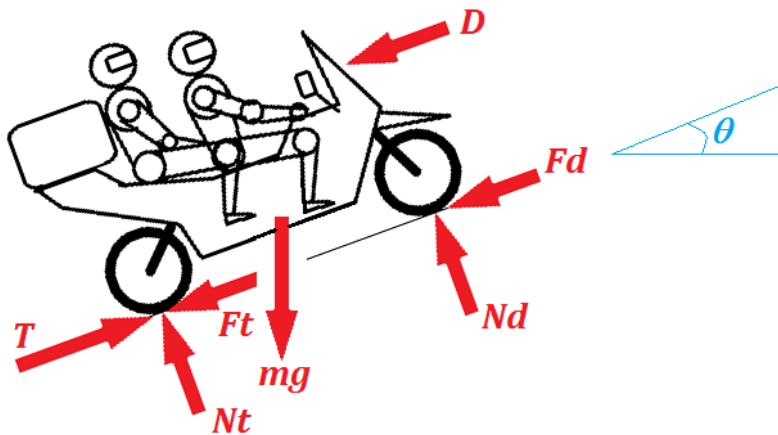


Figura 2.1. Fuerzas actuando sobre la moto en una vía recta.

Asumiendo simetría longitudinal de los pesos se tienen las reacciones de las ruedas por equilibrio normal al plano inclinado:

$$N_t = N_d = \frac{1}{2} mg \cos \theta \quad (1)$$

La resistencia total a la rodadura es entonces:

$$F = C_r(N_d + N_t) = C_r mg \cos \theta \quad (2)$$

Donde  $C_r$  es el coeficiente de resistencia a la rodadura [1], para llantas de motocicletas en carretera de asfalto se toma un valor de éste de 0.02. Haciendo suma de fuerzas en la dirección del movimiento en el plano inclinado se tiene:

$$T - D - F - mg \sin \theta = ma \quad (3)$$

En la Ecuación 3  $a$  es la aceleración de la moto y  $m$  es su masa total. La resistencia del aire se calcula como:

$$D = \frac{1}{2} \rho v^2 C_D A \quad (4)$$

Donde  $\rho$  es la densidad del aire que rodea la moto (1.225 kg/m<sup>3</sup> al nivel del mar en atmósfera estándar ISA, en la ciudad de Bogotá, Colombia es aproximadamente 0.9 kg/m<sup>3</sup>),  $v$  es la velocidad de la moto,  $C_D$  es el llamado coeficiente de resistencia aerodinámica (o arrastre) que para una moto es del orden de 1.0 y  $A$  es el área frontal de la moto (del orden de 1.0 m<sup>2</sup>) [2]. Para diferentes tipos de motos los coeficientes de arrastre y el área frontal varían.

El empuje requerido para el movimiento a una velocidad  $v$  y una aceleración  $a$  es entonces reorganizando la Ec. 3 y sustituyendo las Ec. 2 y 5:

$$T_{req} = m(a + g \sin \theta + C_r g \cos \theta) + \frac{1}{2} \rho v^2 C_D A \quad (5)$$

De la Ecuación 5 se derivan los análisis de aceleración máxima de arranque y velocidad máxima de la moto.

### 2.1. Aceleración máxima de arranque:

Se da cuando la moto va a arrancar ( $v = 0$ ) y la relación de transmisión es la máxima entre el eje del motor y el eje de la rueda de tracción. Entonces el empuje requerido es:

$$T = m(a_{m\acute{a}x} + g \sin \theta + C_r g \cos \theta) \quad (6)$$

A ésta rueda de radio exterior  $r$  llega un torque  $iM$  que genera la fuerza de empuje de acuerdo a la ecuación:

$$T = \frac{iM}{r} \quad (7)$$

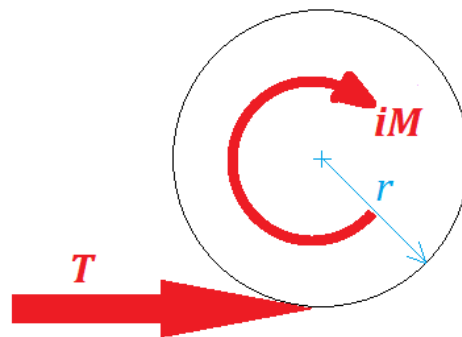


Figura 2.2. Torque en la rueda trasera que produce el empuje.

Donde  $M$  es el torque entregado por el motor e  $i$  es la razón de velocidades entre el eje del motor y la rueda trasera con la primera marcha metida. Para la aceleración máxima el torque es el máximo entregado por el motor y por lo tanto la aceleración máxima de la moto es despejando de las Ec. 6 y 7:

$$a_{m\acute{a}x} = \frac{iM_{m\acute{a}x}}{mr} - g(\sin \theta + C_r \cos \theta) \quad (8)$$

La moto no podrá arrancar cuando la aceleración máxima posible sea cero, por tanto si el resultado de la Ec. 8 entrega un valor nulo o negativo se deduce que en esas condiciones la moto no podrá iniciar la marcha.

## 2.2. Velocidad máxima de la moto:

Se da cuando la moto no puede acelerar más ( $a = 0$ ) y la potencia  $P$  entregada por el motor es la máxima posible. Se sabe por Física Mecánica que la potencia es:

$$P_{m\acute{a}x} = v_{m\acute{a}x} T_{req} \quad (9)$$

Entonces en la Ec. 5 se tiene para la velocidad máxima:

$$\frac{P_{m\acute{a}x}}{v_{m\acute{a}x}} = m(g \sin \theta + C_r g \cos \theta) + \frac{1}{2} \rho v_{m\acute{a}x}^2 C_D A \quad (10)$$

La Ec. 10 se debe resolver por métodos numéricos como se detalla en la Sección 4. Si la velocidad máxima da cero o negativo indica que la moto no podrá andar en las condiciones dadas.

## 3. MODELO MATEMÁTICO CURVAS

El diagrama de cuerpo libre de la moto vista de frente en una curva de radio  $R$  se muestra en la Figura 3.1, donde  $mg$  es el peso de la moto con sus pasajeros y carga,  $N$  es la reacción de las llantas con la vía y  $f$  es la fuerza de fricción esttica que mantiene a la moto en la vía;  $\phi$  es el ángulo de inclinación de la moto para tomar la curva medido desde la vertical.

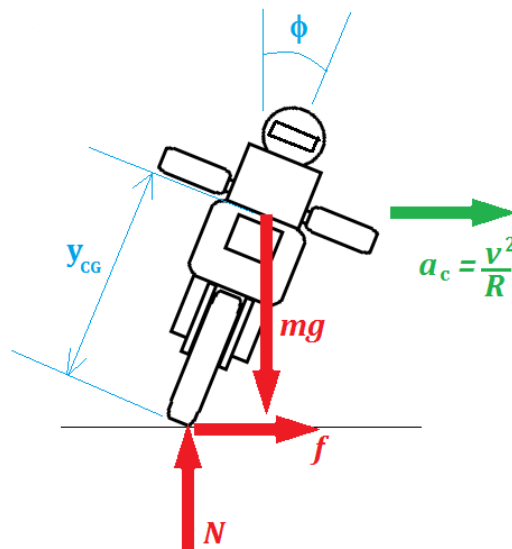


Figura 3.1. Fuerzas actuando sobre la moto en una curva.

Por equilibrio vertical de fuerzas se tiene:

$$N = mg \quad (11)$$

Apuntando hacia el centro de la curva hay una aceleración centrípeta por el movimiento circular:

$$a_c = \frac{v^2}{R} \quad (12)$$

Entonces sumando fuerzas en la dirección del centro de la curva se tiene la fricción estática requerida para mantenerse en la vía:

$$f = \frac{mv^2}{R} \quad (13)$$

### 3.1. Ángulo de inclinación de la moto

Para coger la curva un motociclista se inclina, el motivo es para contrarrestar la inercia que tiende a inclinar la moto hacia afuera de la curva y lo haría caer. De acuerdo a la Fig. 3.1 haciendo equilibrio de momentos alrededor del punto de apoyo de la moto se tiene por el principio de D'Alambert [3]:

$$\frac{mv^2}{R} y_{CG} \cos \phi - mgy_{CG} \sin \phi = 0 \quad (14)$$

Despejando el ángulo de inclinación vemos que no depende de la masa de la moto ni de la altura del centro de masa:

$$\phi = \arctan\left(\frac{v^2}{gR}\right) \quad (15)$$

### 3.2. Velocidad máxima en la curva:

Es la velocidad en la cual la fuerza de fricción requerida iguala a la máxima posible, para un coeficiente de fricción estático entre las llantas y la vía  $\mu_s$  [4] se tiene de la Ec. 13:

$$\frac{mv_{máx}^2}{R} = \mu_s mg \quad (16)$$

Entonces la velocidad máxima en la curva es:

$$v_{máx} = \sqrt{\mu_s g R} \quad (17)$$

Si la moto (y cualquier vehículo de hecho) coge una curva a más de ésta velocidad se saldrá de la misma causando un accidente.

#### 4. IMPLEMENTACIÓN DE LOS MODELOS

Todas las ecuaciones se implementaron en una hoja de cálculo de Excel. La ecuación 10 para la velocidad máxima se soluciona por el método de Newton-Raphson [5] definiendo una función  $h(v)$  que se debe hacer cero:

$$h(v) = m(g \sin \theta + C_r g \cos \theta) + \frac{1}{2} \rho v^2 C_D A - \frac{P_{m\acute{a}x}}{v} \quad (18)$$

La derivada de ésta función respecto a la velocidad máxima es:

$$h'(v) = \rho v C_D A + \frac{P_{m\acute{a}x}}{v^2} \quad (19)$$

Entonces iniciando por una suposición inicial de la solución  $v_0$  se hace la iteración:

$$v_{i+1} = v_i - \frac{h(v_i)}{h'(v_i)} \quad (20)$$

Hasta que la diferencia porcentual entre dos valores consecutivos de  $v$  sea menor que una tolerancia establecida. Una captura de pantalla del ingreso de los datos se muestra en la Fig. 4.1:

CARACTERÍSTICAS VÍA		ESPECIFICACIONES MOTO	
Ángulo inclinación vía [grados]	0	Peso moto [kg]	140
Radio de la curva [m]	30	Peso pasajeros + carga [kg]	160
Coeficiente fricción estática	0,7	<b>Motor y transmisión</b>	
		Potencia [HP]	15
		Torque [N.m]	14
		Máx. Relación motor a final	30,00
		<b>Ruedas</b>	
		Radio rueda tracción [m]	0,300
		Coef. Resistencia rodadura	0,020

Figura 4.1. Interfaz del ingreso de datos de la moto.

Los resultados del desempeño de la moto en vía recta para éstos valores ingresados se muestran en las Fig. 4.2 y 4.3, el programa calcula cada fuerza que se opone al movimiento para permitir analizar cuáles son las que más influyen en los requerimientos de fuerza y potencia. En este ejemplo la gravedad no influye directamente ya que se puso la inclinación en cero (carretera plana).

DESEMPEÑO CALCULADO		
Velocidad máxima [kph]	90	
Aceleración máxima [G]	0,456	
Tiempo 0 a 100 kph [s]	6	

Fuerzas a la velocidad máxima		
Causante	Fuerza [N]	Fracción
Gravedad	0	0%
Aire	387	87%
Rodadura	59	13%
<b>Total</b>	<b>445</b>	<b>100%</b>

Figura 4.2. Resultado de desempeño de la moto en vía recta.

Para los mismos valores de ingreso excepto la inclinación de la vía que ahora es de 5° se tiene:

DESEMPEÑO CALCULADO	
Velocidad máxima [kph]	72
Aceleración máxima [G]	0,369
Tiempo 0 a 100 kph [s]	8

Fuerzas a la velocidad máxima		
Causante	Fuerza [N]	Fracción
Gravedad	256	46%
Aire	245	44%
Rodadura	59	10%
<b>Total</b>	<b>560</b>	<b>100%</b>

**Figura 4.3.** Resultado de desempeño de la moto en vía con 5° de inclinación.

Para tomar la curva de 30 m de radio se tiene:

ANÁLISIS VIRAJE	
Vel. Máxima [kph]	52
Velocidad [kph]	Ángulo inclinación [grados]
5	0,4
10	1,4
14	3,1
19	5,4
24	8,4
28	11,9
33	15,9
38	20,4
42	25,2
47	30,1
52	35,0

**Figura 4.5.** Velocidad máxima en la curva y ángulos de inclinación de la moto para tomarla a diferentes velocidades.

## 5. CONCLUSIONES

Se desarrolló un modelo matemático y se implementó en Excel para calcular la dinámica y el desempeño de una motocicleta en diversas condiciones de la vía. Con éste modelo se observa la enorme influencia de la inclinación de la vía en la potencia requerida y por tanto la velocidad máxima y la aceleración máxima, como se puede observar en las Fig. 5.1 y 5.2.

Este es un modelo básico de la dinámica de la moto, útil para hacer diseños conceptuales y dimensionamiento de motor y transmisiones de motocicletas a gasolina y eléctricas.

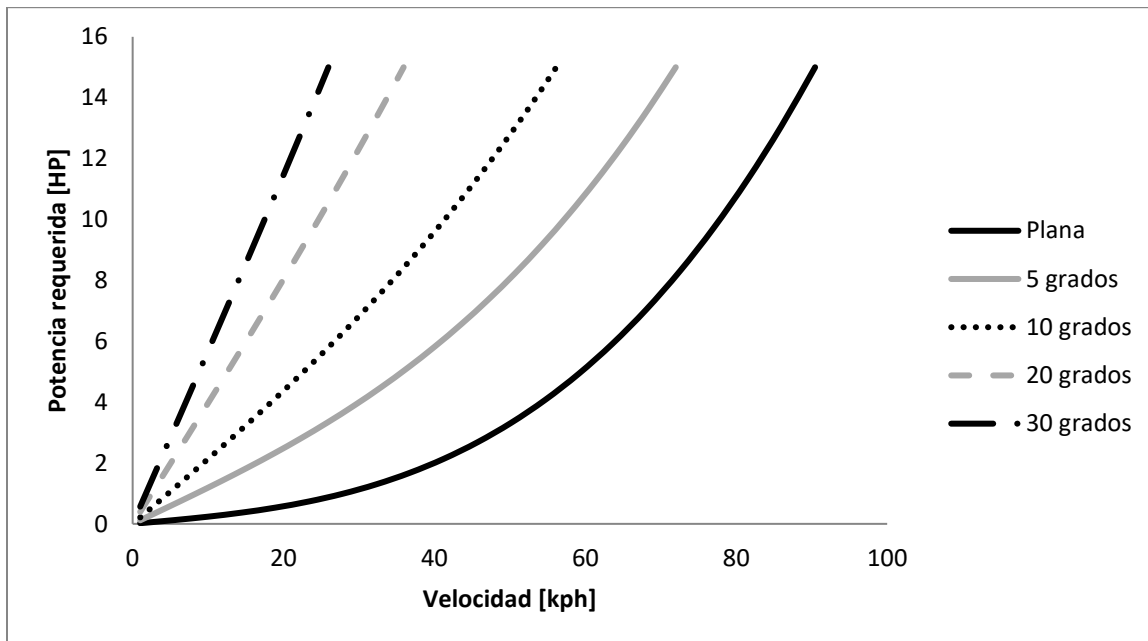


Figura 5.1. Potencia requerida para el rango de velocidades de la moto usada como ejemplo a diferentes inclinaciones de la vía.

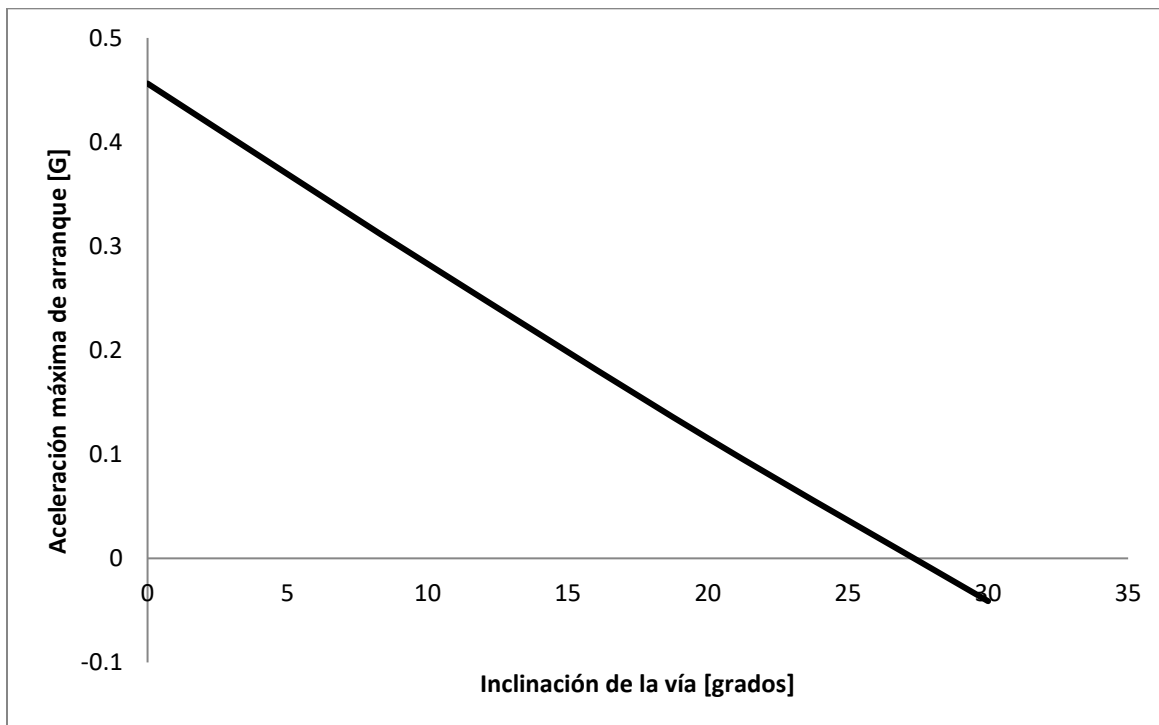


Figura 5.2. Aceleración máxima de arranque de la moto usada como ejemplo a diferentes inclinaciones de la vía.



## REFERENCIAS

[1] The Engineering ToolBox. *Rolling Resistance*. [http://www.engineeringtoolbox.com/rolling-friction-resistance-d\\_1303.html](http://www.engineeringtoolbox.com/rolling-friction-resistance-d_1303.html)

[2] Kraig Schultz. *Opinions on Aerodynamics and Electric Motorcycles*. <http://www.schultzengineering.us/aero.htm>

[3] Andrew Pytel, Jaan Kiusalaas. *Ingeniería Mecánica: Dinámica*. 2ª edición.

[4] The Engineering ToolBox. *Friction and Coefficients of Friction*. [http://www.engineeringtoolbox.com/friction-coefficients-d\\_778.html](http://www.engineeringtoolbox.com/friction-coefficients-d_778.html)

[5] Carlos Armando De Castro. *Métodos Numéricos Básicos para Ingeniería*. 2ª edición. Asesorías en Matemáticas, Física e Ingeniería. 2014.

<https://tutor.cadecastro.com/p/metodos-numericos-basicos-para.html>