Deflexión – Curva elástica

Carlos Armando De Castro P.

1. Introducción

En el estudio de la Estática y la Dinámica se asume que los cuerpos bajo estudio son *cuerpos rígidos*, es decir, que no se deforman bajo la acción de las cargas que actúan sobre ellos. El caso real no es así, ya que todos los cuerpos se deforman. En éste escrito se muestra cómo hallar la ecuación que describe la forma de un miembro largo de acuerdo con las cargas que actúan sobre él.

2. La curva elástica

Es la ecuación $y = y(x)$ que describe la forma de un miembro largo de acuerdo con las cargas que actúan sobre él, tal ecuación es llamada la *curva elástica* ya que se asume que los esfuerzos internos se encuentran en la región elástica de la curva esfuerzo-deformación.

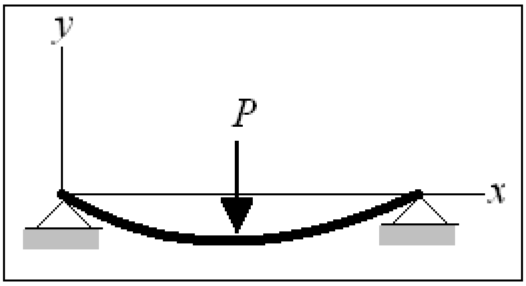

Figura 2.1. *Viga deformada por una carga puntual P.*

Considere una sección longitudinal de una viga de longitud Δx antes de la aplicación de cargas y una línea que une dos puntos extremos A y B de ella ubicados a una altura *y* sobre el eje neutro que lo ubicaremos mediante los puntos P y Q:

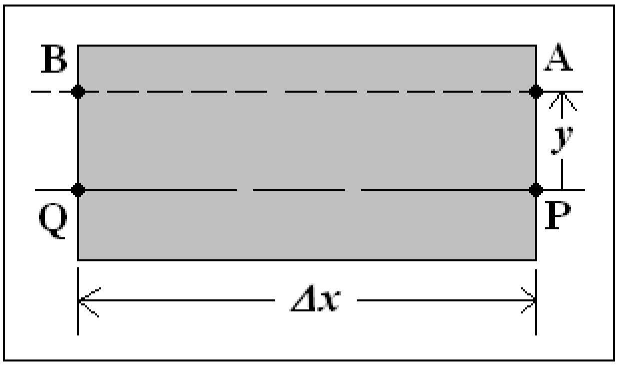

Figura 2.2. *Sección longitudinal de una viga sin cargas.*

Tenemos entonces que las distancias AB y PQ son iguales a Δx.

Cuando actúa sobre el elemento un momento flector *M* positivo, la sección arriba del eje neutro se contrae por la acción del momento flector mientras que la sección inferior se alarga. La forma de la sección longitudinal deformada es entonces:

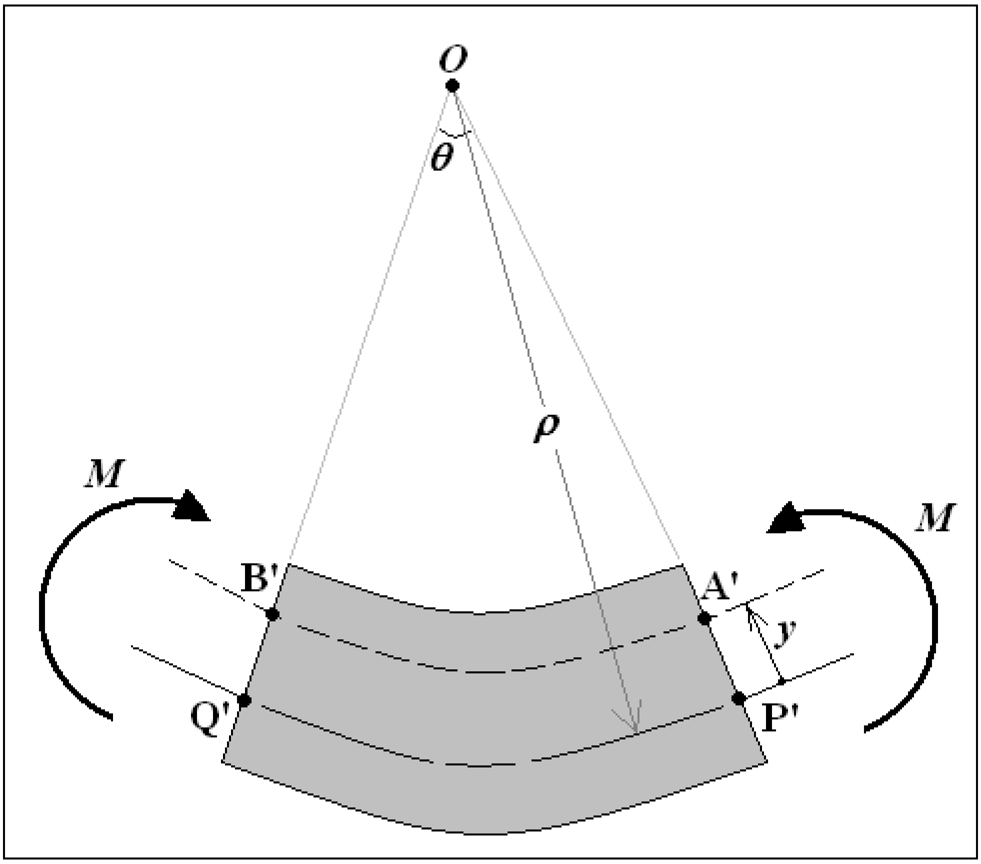

Figura 2.3. *Sección longitudinal deformada por la acción de un momento flector positivo.*

El punto O es el centro de curvatura del elemento y ρ es el radio de curvatura del eje neutro alrededor de O. De la geometría tenemos:

$$\frac{P'Q'}{\rho} = \frac{A'B'}{\rho - y} \quad (2.1)$$

Por definición, el eje neutro no se alarga ni se contrae por la acción del momento flector, entonces:

$$P'Q' = PQ = \Delta x \qquad (2.2)$$

La distancia $A'B'$ es:

$$A'B' = (1+\varepsilon_x)AB = (1+\varepsilon_x)\Delta x \quad (2.3)$$

La deformación ε_x es:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{My}{EI} \quad (2.4)$$

Entonces la ecuación 2.3 da:

$$A'B' = \left(1 - \frac{My}{EI}\right)\Delta x \qquad (2.5)$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.2 y 2.5 en la ecuación 2.1 tenemos:

$$\frac{\Delta x}{\rho} = \left(1 - \frac{My}{EI}\right)\frac{\Delta x}{\rho - y}$$

Cancelando y reagrupando:

$$\frac{\rho - y}{\rho} = 1 - \frac{My}{EI}$$

$$1 - \frac{y}{\rho} = 1 - \frac{My}{EI}$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}}$$

(2.6)

Del cálculo diferencial, se sabe que el inverso del radio de curvatura ρ está dado por:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\left(d^2 y / dx^2\right)}{\left[1 + \left(dy/dx\right)^2\right]^{3/2}} \qquad (2.7)$$

En los casos de deflexión de vigas, las pendientes *dy/dx* son muy pequeñas y sus cuadrados despreciables, entonces el inverso del radio de curvatura se aproxima como

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2} \qquad (2.8)$$

Sustituyendo 2.8 en la ecuación 2.6 tenemos la ecuación diferencial de la curva elástica:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

$$\boxed{EI\frac{d^2 y}{dx^2} = M(x)}$$

(2.9)

Las constantes de integración que aparecen al resolver la ecuación 2.9 se determinan de acuerdo a las condiciones de frontera de la viga. Para apoyo conectado por pasador, la condición es $y = 0$; para apoyo empotrado, las condiciones son $dy/dx = 0$, $y = 0$.