ECUACIONES DIFERENCIALES SEPARABLES

Carlos Armando De Castro
Asesorías en Matemáticas, Física e Ingeniería

Una ecuación diferencial *separable* es una de cualquiera de las siguientes formas:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y), \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{g(y)}{f(x)}$$

Se llama separable porque pueden dejarse de un lado de la igualdad todo lo que tenga x y del otro todo lo que tenga y para así integrar cada lado independientemente. En cada una de las ecuaciones las soluciones serían respectivamente:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int \frac{dx}{f(x)} + C$$

Donde C es la constante de integración neta de ambas integrales y se puede hallar si se tienen condiciones iniciales.

Problemas con condiciones iniciales:

Si se tiene una condición inicial $y(x_0) = y_0$ la solución se puede hallar incluyendo los límites en las integrales y se evita tener que despejar la constante así:

$$\int_{y_0}^{y} g(y)dy = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$$

ADVERTENCIA:

No siempre se puede despejar y completamente, por tanto la respuesta se deja expresada como una función implícita.

No siempre se puede hacer la integral resultante y en esos casos hay que considerar otros métodos de solución o utilizar métodos numéricos (para ello los invitamos a descargar nuestro libro "*Métodos numéricos básicos para ingeniería*").

Ejemplo solución general:

Resolver la ecuación diferencial:

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx}+y=1$$

Solución: Esta ecuación diferencial es separable, dejando la derivada sola se tiene:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-y}{x^2+1}$$

Separando entonces x y y e integrando:

$$\int\frac{dy}{1-y}=\int\frac{dx}{x^2+1}+C$$

$$-\ln(1-y)=\arctan x+C$$

Despejamos la variable de interés, primero usamos propiedades de los logaritmos:

$$\ln\frac{1}{1-y}=\arctan x+C$$

Exponenciando ambos lados:

$$\frac{1}{1-y}=e^{\arctan x+C}$$

$$\frac{1}{e^{\arctan x+C}}=1-y$$

$$\boxed{y=1-\frac{1}{e^{\arctan x+C}}}$$

Ejemplo con condiciones iniciales:

Resolver el problema con condiciones iniciales:

$$\cos x \frac{dy}{dx} = y^2 \ , \qquad y(0) = 1$$

Solución: separando de cada lado x y y:

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{\cos x}$$

Integrando:

$$\int_1^y y^{-2} dy = \int_0^x \sec x \, dx$$

$$-\frac{1}{y}\bigg|_1^y = \ln(\sec x + \tan x)|_0^x$$

$$-\frac{1}{y} + \frac{1}{1} = \ln(\sec x + \tan x) - \ln(\sec 0 + \tan 0)$$

Calculando los valores sec0 = 1 y tan0 = 0:

$$-\frac{1}{y} + 1 = \ln(\sec x + \tan x) - \ln(1)$$

Como ln(1)=0 se tiene:

$$-\frac{1}{y} + 1 = \ln(\sec x + \tan x)$$

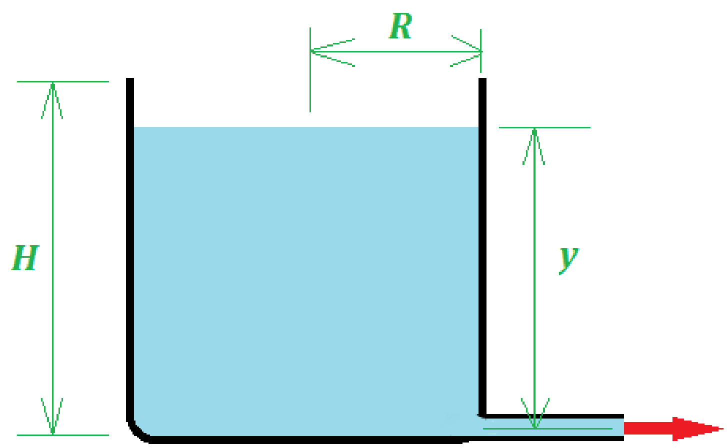
Despejando y:

$$\frac{1}{y} = 1 - \ln(\sec x + \tan x)$$

$$\boxed{y = \frac{1}{1 - \ln(\sec x + \tan x)}}$$

Ejemplo de aplicación: *vaciado de un tanque cilíndrico*.

Considere un tanque cilíndrico con las medidas que se muestran, el tanque está inicialmente lleno y en su fondo se deja salir el agua.



El caudal (flujo volumétrico) de agua que sale es proporcional a la raíz cuadrada de la altura instantánea en el tanque. Hallar la altura del agua en función del tiempo y el tiempo total que demora en vaciarse.

Solución: el flujo volumétrico es la razón de cambio del volumen de agua en el tanque, como va saliendo es negativo y se tiene según lo enunciado:

$$\frac{dV}{dt} = -k\sqrt{y} \quad (1)$$

El volumen de agua en cualquier instante es entonces:

$$V = \pi R^2 y$$

Derivando respecto al tiempo:

$$\frac{dV}{dt} = \pi R^2 \frac{dy}{dt} \quad (2)$$

Igualando (1) y (2) se tiene:

$$\pi R^2 \frac{dy}{dt} = -k\sqrt{y}$$

Separando:

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = -\frac{k}{\pi R^2}dt$$

Integrando con la condición inicial $y(0) = H$ se tiene:

$$\int_H^y y^{-1/2}dy = -\frac{k}{\pi R^2}\int_0^t dt$$

Haciendo las integrales y evaluando en los límites:

$$2\left(\sqrt{y} - \sqrt{H}\right) = -\frac{kt}{\pi R^2}$$

Despejando la altura y:

$$\sqrt{y} - \sqrt{H} = -\frac{kt}{2\pi R^2}$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{H} - \frac{kt}{2\pi R^2}$$

$$\boxed{y = \left(\sqrt{H} - \frac{kt}{2\pi R^2}\right)^2}$$

El tiempo total de vaciado t_f se da cuando la altura es $y = 0$, entonces:

$$\left(\sqrt{H} - \frac{kt_f}{2\pi R^2}\right)^2 = 0$$

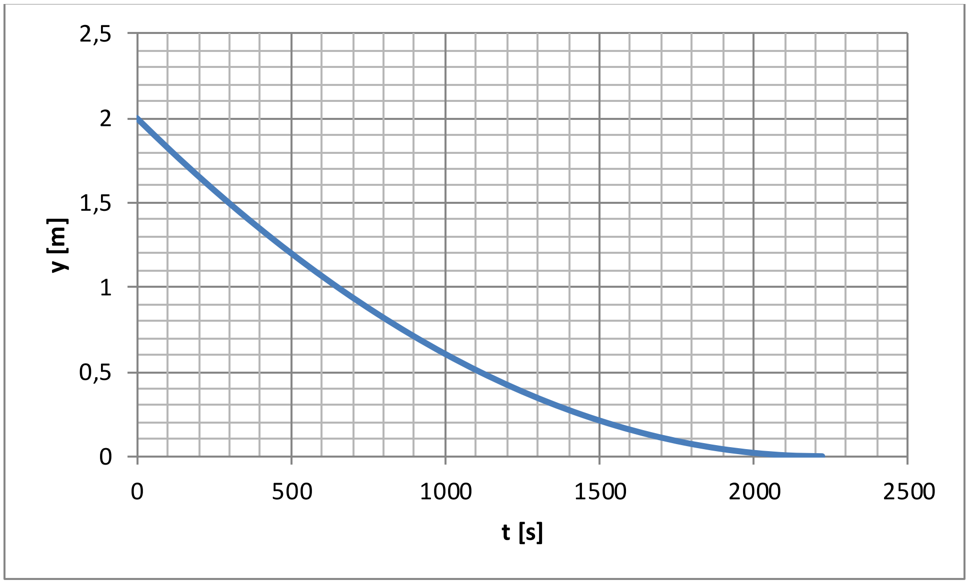
Despejando:

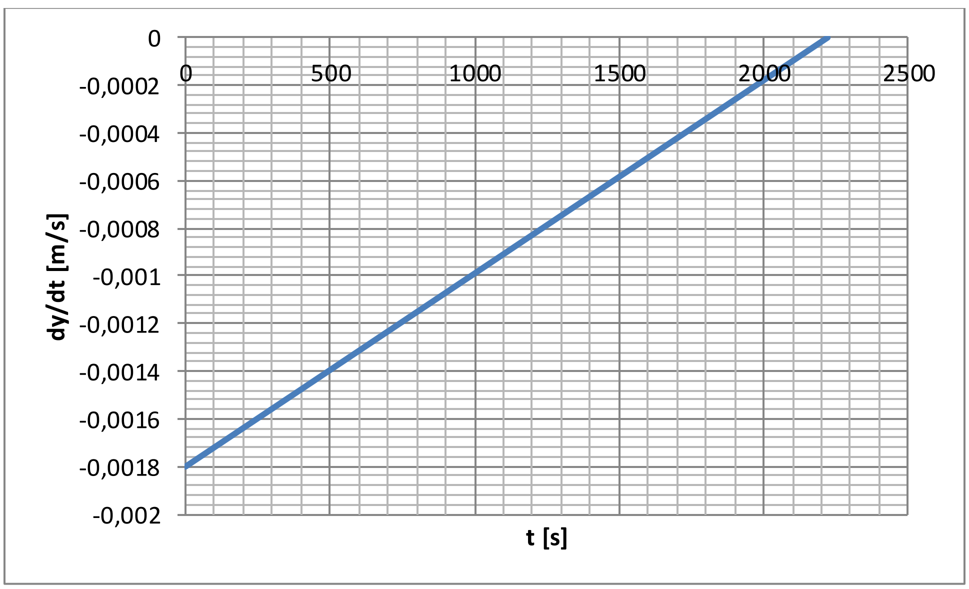
$$\frac{kt_f}{2\pi R^2} = \sqrt{H}$$

$$\boxed{t_f = \frac{2\pi R^2}{k}\sqrt{H}}$$

Para los siguientes valores se tiene la gráfica de altura contra tiempo y de la razón de cambio de la altura:

H [m]	2
R [m]	0,5
k [m^2.5/s]	0,001
tf [s]	*2221,4*


2,5
2
1,5
1
0,5
0
y [m]
0
500
1000
1500
2000
2500
t [s]


0
-0,0002
-0,0004
-0,0006
-0,0008
-0,001
-0,0012
-0,0014
-0,0016
-0,0018
-0,002
dy/dt [m/s]
0
500
1000
1500
2000
2500
t [s]