Ecuaciones de Euler-Lagrange y Lagrangiano de Sistemas Mecánicos de partículas

Las ecuaciones de Euler-Lagrange se utilizan para describir cualquier sistema mecánico por medio de coordenadas generalizadas de posición. El lagrangiano se utiliza para los sistemas conservativos y es un caso particular de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Definiremos:

$\boldsymbol{q}_j$: Coordenadas generalizadas de posición, puede ser una distancia, un ángulo, etc.…
$\dot{\boldsymbol{q}}_j$: Velocidades generalizadas, son las derivadas temporales de las posiciones.
$\boldsymbol{Q}_j$: Fuerzas generalizadas que actúan sobre la partícula *j*.

Entonces, si *T* es la energía cinética total del sistema (la suma de las energías cinéticas de todas las partículas) y *V* es la energía potencial total del sistema, las ecuaciones de Euler- Lagrange para la *j*-ésima partícula son

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

En el caso de un sistema conservativo, sabemos que $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$, entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange resultan

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0$$

El *lagrangiano* de un sistema se define como $L = T - V$, además, como en los sistemas mecánicos la energía potencial no depende de las velocidades sino únicamente de las posiciones, tenemos que $\partial V / \partial \dot{q}_j = 0$, entonces podemos escribir

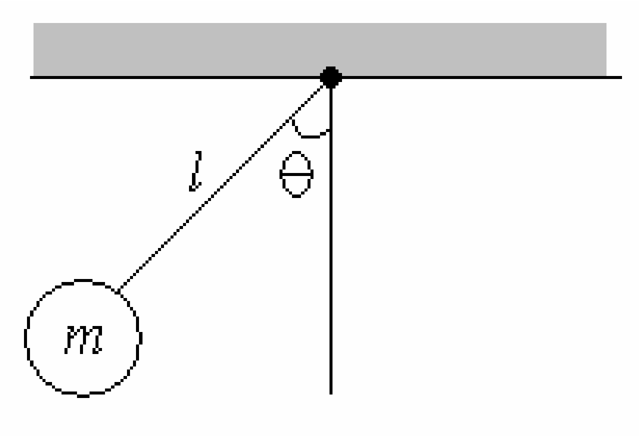
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

De lo anterior, vemos que las ecuaciones del sistema pueden escribirse en términos del lagrangiano de la forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0$$

Ejemplo: péndulo simple

Considere un péndulo simple como el que se muestra en la figura:



Como el sistema es conservativo (se asume que no hay pérdidas por fricción ni resistencia del aire) podemos describirlo utilizando el lagrangiano, entonces

- Energía cinética de la masa:

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 = \tfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

- Energía potencial de la masa:

$$V = -mgl\cos(\theta)$$

- Lagrangiano del sistema:

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos(\theta)$$

Con lo anterior, podemos hallar la ecuación que rigen el movimiento de la masa por medio de las ecuaciones de Euler-Lagrange, entonces:

- Ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left(\tfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+mgl\cos\theta\right)\right)-\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\tfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+mgl\cos\theta\right)=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\theta}\right)-\frac{\partial}{\partial \theta}\left(mgl\cos\theta\right)=0$$

$$ml^2\ddot{\theta}+mgl\sin\theta=0$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación por *ml* tenemos la conocida ecuación del péndulo simple

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$$