Elementos a compresión – Pandeo de columnas

Carlos Armando De Castro P.

Contenido:

1. Introducción

Se denomina "columna" a los elementos que trabajan bajo compresión. Generalmente, las columnas fallan a cargas menores a las que producirían falla por fluencia o fractura del material, la falla de las columnas es denominada "pandeo" y es una falla por pérdida de función de la columna. Por lo tanto, en el diseño de elementos que se encuentren a compresión es necesario hacer un análisis de pandeo.

En el presente escrito se presentan métodos para análisis y diseño de columnas largas (o columnas de Euler) con carga central, de columnas intermedias con carga central y de elementos cortos a compresión con carga excéntrica. Los métodos para distinguir entre columnas largas, intermedias y cortas también se verán. Todas las columnas se asumen como elásticas en este escrito.

2. Columnas largas

También conocidas como *columnas de Euler*. Asuma una columna elástica conectada por pasadores con carga central P y longitud L como en la figura:

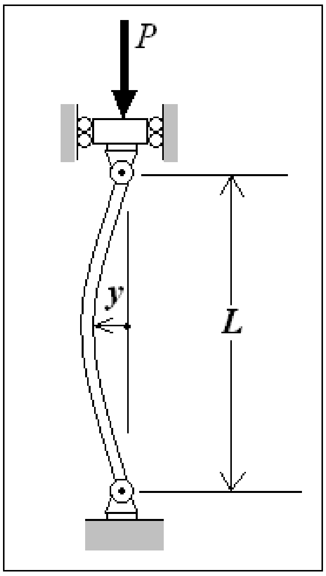

Figura 2.1. *Pandeo de una columna conectada por pasadores.*

El momento en la sección central de la columna, donde se produce la máxima deflexión es $M = -Py$. Del análisis de las deflexiones sabemos que el momento está relacionado con la deflexión por la ecuación diferencial *EIy''(x) = M* (*I* es el *menor* valor del momento de inercia de área de la sección transversal), entonces, para la deflexión de la columna tenemos la ecuación diferencial:

$$\boxed{\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{EI} y = 0}$$

(2.1)

La solución de 2.1 es de la forma

$$y(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) \quad (2.2)$$

Las condiciones de frontera en los apoyos de pasadores son *y(0)* = 0 y *y(L)* = 0, entonces en 2.2:

Primera condición: $0 = C_1$

Segunda condición: $0 = C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right)$

Para la solución no trivial de la segunda condición, tenemos que el argumento de la función seno debe ser un múltiplo entero de π, entonces

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}L = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, ... \quad (2.3)$$

Para el primer modo de pandeo (n = 1), tenemos entonces de 2.3 que la carga crítica que producirá pandeo de la columna es:

$$\boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}}$$

(2.4)

Consideremos ahora una columna con un extremo fijo y el otro libre donde se aplica la carga.

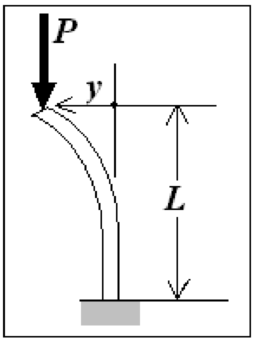

Figura 2.2. *Pandeo de una columna con un extremo empotrado y el otro libre.*

La longitud efectiva donde se producirá el pandeo de la columna es $L_{ef} = 2L$, entonces de 2.4:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2} = \frac{0.25\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.5)$$

Para columnas con otras uniones, tenemos que para ambos extremos empotrados la longitud efectiva donde se producirá el pandeo de la columna es $0.5L$, y para un extremo empotrado y el otro unido por pasador la longitud efectiva donde se producirá el pandeo de la columna es $\left(\sqrt{2}/2\right)L$.

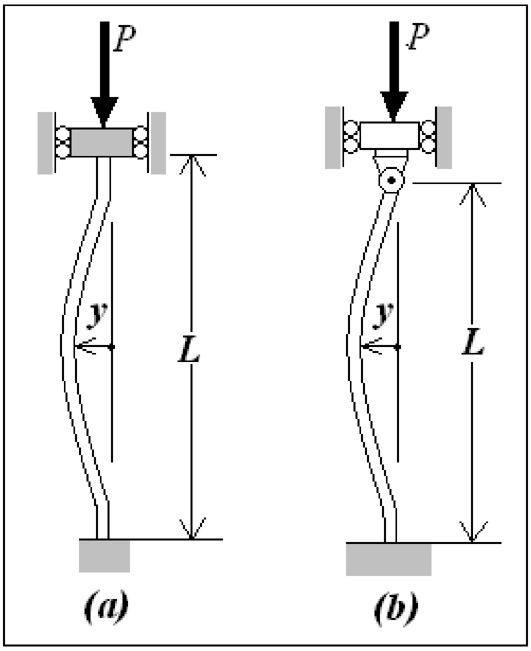

Figura 2.3. *Pandeo de columnas con (a) ambos extremos empotrados y (b) un extremo empotrado y el otro unido por pasador.*

Para ambos extremos empotrados:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.5L)^2} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.6)$$

Para un extremo empotrado y el otro unido por pasador:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}L\right)^2} = \frac{2\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.7)$$

En general, la ecuación de la carga crítica que producirá pandeo de una columna puede escribirse como

$$\boxed{P_{cr} = \frac{C\pi^2 EI}{L^2}}$$

(2.8)

Donde C es una constante que depende de las condiciones de unión en los extremos de la columna.

Valor de *C*

Condiciones de los extremos	**Teórico**	**Conservador (Shigley)**	**Recomendado (Shigley)**
Empotrado-Libre	0.25	0.25	0.25
Pasador-Pasador	1	1	1
Empotrado-Pasador	2	1	1.2
Empotrado-Empotrado	4	1	1.2

Tabla 2.1. *Valores de C para diferentes condiciones de frontera.*

3. La razón de esbeltez

Dividiendo ambos lados de la ecuación 2.8 entre el área de la sección transversal de la columna tenemos la *carga crítica por unidad de área*:

$$\frac{P_{cr}}{A} = \frac{C\pi^2 EI}{L^2 A} = \frac{C\pi^2 Ek^2}{L^2} = \frac{C\pi^2 E}{(L/k)^2} \quad (3.1)$$

Donde $k = \sqrt{I/A}$ es el *radio de giro* de la sección transversal de la columna. El valor (L/k) es llamado la *razón de esbeltez*, y es utilizado para distinguir entre columnas largas, columnas intermedias y elementos cortos a compresión.

La gráfica de P_{cr}/A en función de (L/k) es la siguiente:

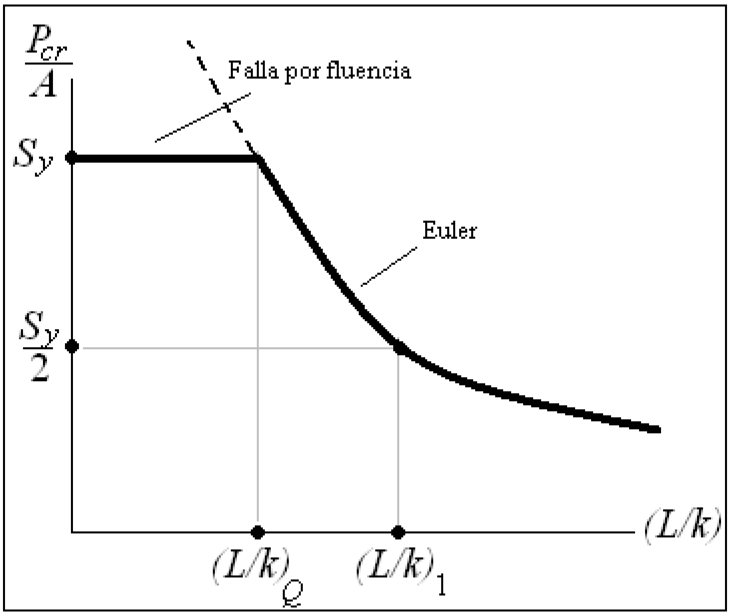

Figura 3.1. *Carga crítica por unidad de área en función de la razón de esbeltez.*

El valor $(L/k)_1$ define el límite entre una columna larga y una columna intermedia, ya que se ha observado que las columnas no siguen muy bien la ecuación del pandeo de

Euler cuando $(L/k) < (L/k)_1$. Cuando $(L/k) < (L/k)_Q$ se considera el elemento como un elemento corto a compresión pura y fallará por fluencia del material.

De la figura 3.1 tenemos que el valor de $(L/k)_1$ es el valor cuando $P_{cr}/A = S_y/2$, entonces de 3.1:

$$\frac{S_y}{2} = \frac{C\pi^2 E}{(L/k)_1^2}$$

$$\boxed{\left(\frac{L}{k}\right)_1 = \left[\frac{2C\pi^2 E}{S_y}\right]^{1/2}}$$

(3.2)

De la figura 3.1 tenemos que el valor de $(L/k)_Q$ es el valor cuando $P_{cr}/A = S_y$, entonces de 3.1:

$$S_y = \frac{C\pi^2 E}{(L/k)_Q^2}$$

$$\boxed{\left(\frac{L}{k}\right)_Q = \left[\frac{C\pi^2 E}{S_y}\right]^{1/2}}$$

(3.3)

4. Columnas intermedias

Como se ha dicho antes, se ha observado que las columnas no siguen muy bien la ecuación del pandeo de Euler cuando $(L/k) < (L/k)_1$. La forma más aceptada para hallar una ecuación para el pandeo en columnas intermedias es por medio de una parábola que una los puntos $(0,\ \ S_y)$ y $((L/k)_1,\ \ S_y/2)$ de la gráfica de P_{cr}/A en función de (L/k). La ecuación que cumple tal requisito es llamada la *parábola de Johnson*.

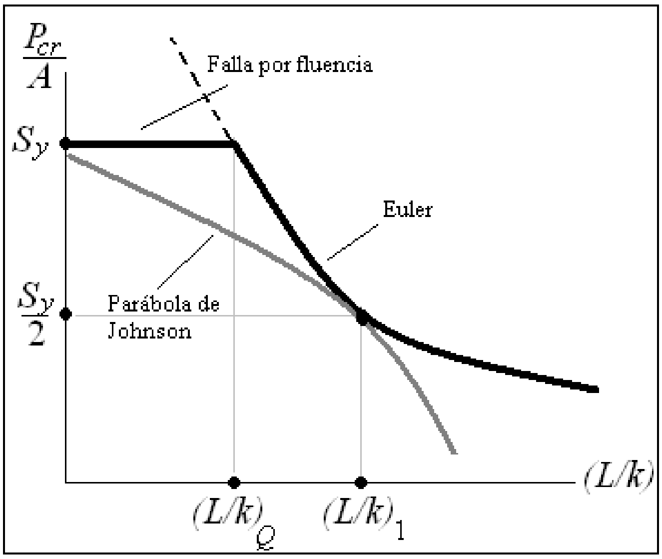

Figura 4.1. *Parábola de Johnson.*

La ecuación de la parábola es de la forma

$$\frac{P_{cr}}{A} = a\left(\frac{L}{k}\right)^2 + b$$

En el punto $(0, \quad S_y)$: $S_y = b$
En el punto $((L/k)_1, \quad S_y/2)$:

$$\frac{S_y}{2} = a\left(\frac{2C\pi^2 E}{S_y}\right) + S_y$$

$$\Rightarrow a = -\frac{S_y^2}{4C\pi^2 E}$$

La ecuación de la parábola de Johnson es entonces:

$$\frac{P_{cr}}{A} = -\frac{S_y^2}{4C\pi^2 E}\left(\frac{L}{k}\right)^2 + S_y$$

$$\boxed{\frac{P_{cr}}{A} = S_y - \frac{1}{CE}\left(\frac{S_y}{2\pi}\frac{L}{k}\right)^2}$$

(4.1)

Se cumple para $(L/k)_Q < (L/k) < (L/k)_1$.

5. Elementos cortos a compresión

Considere un elemento corto ($(L/k) < (L/k)_Q$) sujeto a compresión por una carga P a una distancia e del eje neutro.

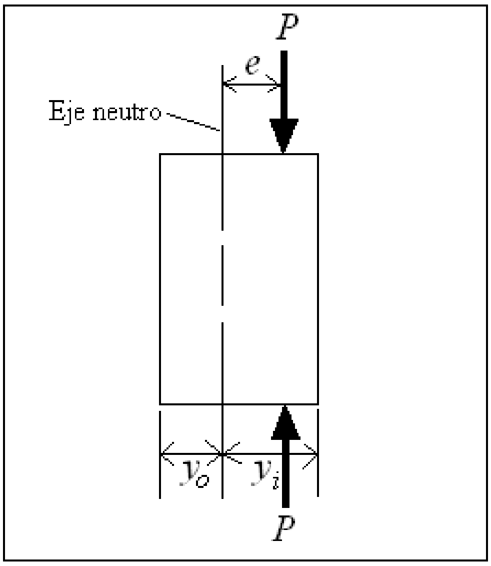

Figura 5.1. *Elemento corto a compresión.*

El momento alrededor del eje neutro es $M = Pe$. El esfuerzo máximo en la parte interna del elemento es:

$$\sigma_i = -\frac{P}{A} - \frac{My_i}{I} = -\frac{P}{A} - \frac{Pey_i}{I} = -\frac{P}{A} - \frac{Pey_i}{k^2 A}$$

$$\boxed{\sigma_i = -\frac{P}{A}\left(1 + \frac{ey_i}{k^2}\right)}$$

(5.1)

Como puede verse, el esfuerzo en la parte interna del elemento es siempre a compresión. El esfuerzo máximo en la parte exterior del elemento es:

$$\sigma_o = -\frac{P}{A} + \frac{My_o}{I} = -\frac{P}{A} + \frac{Pey_o}{I} = -\frac{P}{A} + \frac{Pey_o}{k^2 A}$$

$$\boxed{\sigma_o = -\frac{P}{A}\left(1 - \frac{ey_o}{k^2}\right)}$$

(5.2)

El esfuerzo σ_o es a compresión si $ey_o / k^2 < 1$ y a tensión si $ey_o / k^2 > 1$. Para saber si un elemento corto a compresión hecho de un material con esfuerzo de fluencia a tensión S_{yt} y esfuerzo de fluencia a compresión S_{yc} fallará con un factor de seguridad n, primero debe observarse el valor de (ey_o / k^2). Si $ey_o / k^2 < 1$, ambos esfuerzos son a compresión y la falla se presentará cuando

$$\boxed{\frac{P}{A}\left(1 + \frac{ey_i}{k^2}\right) = \frac{S_{yc}}{n}}$$

(5.3)

Si $ey_o / k^2 > 1$, entonces primero debe verse si hay falla por fluencia a tensión

$$\boxed{\frac{P}{A}\left(1 - \frac{ey_o}{k^2}\right) = \frac{S_{yt}}{n}}$$

(5.4)

En caso de que $\sigma_o < S_y / n$, debe entonces verse si el material fallará por compresión con la ecuación 5.3.

RESUMEN DE ELEMENTOS A COMPRESIÓN Y PANDEO

CONDICIONES DE EXTREMOS

Valor de *C*

Condiciones de los extremos	**Teórico**	**Conservador (Shigley)**	**Recomendado (Shigley)**
Empotrado-Libre	0.25	0.25	0.25
Pasador-Pasador	1	1	1
Empotrado-Pasador	2	1	1.2
Empotrado-Empotrado	4	1	1.2

RAZÓN DE ESBELTEZ

$$\left(\frac{L}{k}\right)_1 = \left[\frac{2C\pi^2 E}{S_y}\right]^{1/2}$$

$$\left(\frac{L}{k}\right)_Q = \left[\frac{C\pi^2 E}{S_y}\right]^{1/2}$$

COLUMNAS INTERMEDIAS

$(L/k)_Q < (L/k) < (L/k)_1$

$$\frac{P_{cr}}{A} = S_y - \frac{1}{CE}\left(\frac{S_y}{2\pi}\frac{L}{k}\right)^2$$

COLUMNAS LARGAS

$(L/k) > (L/k)_1$

$$P_{cr} = \frac{C\pi^2 EI}{L^2}$$

$$\frac{P_{cr}}{A} = \frac{C\pi^2 E}{(L/k)^2}$$

ELEMENTOS CORTOS A COMPRESIÓN

$(L/k) < (L/k)_Q$

$$\sigma_i = -\frac{P}{A}\left(1 + \frac{ey_i}{k^2}\right)$$

$$\sigma_o = -\frac{P}{A}\left(1 - \frac{ey_o}{k^2}\right)$$

Si $ey_o / k^2 < 1$:

$$\frac{P}{A}\left(1 + \frac{ey_i}{k^2}\right) = \frac{S_{yc}}{n}$$

Si $ey_o / k^2 > 1$:

$$\frac{P}{A}\left(1 - \frac{ey_o}{k^2}\right) = \frac{S_{yt}}{n}$$