Análisis del problema del caminante bajo la lluvia: modelado matemático utilizando números adimensionales.

Carlos Armando De Castro Payares.
cadecastro@gmail.com

Resumen

En el presente artículo se presenta el desarrollo de un modelo matemático que permita predecir la cantidad de agua absorbida por la ropa de un transeúnte que se encuentre caminando bajo la lluvia. El Teorema Π de Buckingham es utilizado como una herramienta para el desarrollo de los grupos adimensionales necesarios para desarrollar el modelo. Después de hallar los números adimensionales se realiza un proceso lógico para proponer un modelo que se ajuste a las observaciones de la vida diaria y permita realizar predicciones válidas. Se deja a alguien interesado en el tema el proceso de experimentación necesario para hallar las correlaciones empíricas entre los números adimensionales propuestos y la validación del modelo hallado, puesto que no se dispone de los instrumentos necesarios para hacerlo.

1. INTRODUCCIÓN

En la experiencia de la vida diaria, muchos (si no es que todos) nos hemos visto sorprendidos cuando una repentina lluvia empieza a caer sobre nosotros. En ocasiones nos parece óptimo porque la lluvia cae refrescándonos; a veces nos parece pésimo porque no es de nuestro deseo el terminar empapados o helándonos por las bajas temperaturas si vivimos en una ciudad fría (el cual es mi caso). En el segundo caso, los desafortunados que no tenemos un buen paraguas echamos a correr lo más rápido posible buscando un refugio, y eso lo hacemos por instinto, puesto que los animales (quienes demuestran más pericia e inteligencia que los hombres en las cuestiones referentes al mundo natural) también van rápidamente a buscar refugio. Se ven muchas personas proclamando que lo mejor es caminar lentamente porque, dicen, al correr nos llevamos por delante más agua que la que cae sobre nosotros y nos mojamos más (aunque, como diría el Doctor Eduardo Lasprilla, sería interesante ponerlos bajo la lluvia para ver si hacen lo que dicen). Los famosos *Mythbusters* hicieron pruebas bajo un ambiente controlado y dijeron que esto era cierto, aunque cuando repitieron el experimento bajo la lluvia al aire libre resultó ser que quien corrió absorbió menor cantidad de agua que quien se dedicó a caminar. La polémica anterior me ha impulsado a pensar sobre el problema y desarrollar un modelo matemático que sea consistente con lo que observamos cada vez que llueve, para así poder observar desde la abstracción de la realidad de un modelo matemático el por qué nuestro instinto nos impulsa a correr cuando nos sorprende la lluvia. A pesar de las quizás no tan serias razones para iniciar ésta investigación (la cual doy fe que no he visto en ningún otro sitio), las aplicaciones de un modelo aún más elaborado podrían ser interesantes, ya que, como me ha dicho mi amigo Pablo Montes, podría utilizarse para el diseño de dispositivos que absorban humedad del rocío de la madrugada en lugares con pocas precipitaciones o quién sabe en qué más cosas útiles para el progreso (sostenible) de la civilización.

Agradezco a mi amigo Leyder Lasprilla quien me ha mostrado las cosas desde una perspectiva que no tenía y me ha dado ánimos para continuar con el desarrollo de éste modelo luego de haber visto mi primer artículo sobre éste tema.

2. DEFINICIÓN DE LAS VARIABLES

Consideremos que la masa de agua (m_w) absorbida por la ropa del caminante depende las siguientes cinco variables: el flujo másico de agua que cae *por unidad de área* ($\dot{m}_{rA}$), la distancia a recorrer bajo la lluvia (D), la magnitud de la componente horizontal de la velocidad promedio de caída de las gotas de lluvia (V_r) la cual consideraremos es aleatoria y no se presenta en una única dirección a favor o en contra de la dirección del movimiento del caminante; la magnitud de la velocidad del caminante (V_p, la cual suponemos es horizontal, a menos que el sujeto en cuestión esté cayéndose de un sitio alto) y el área superficial de la ropa del caminante (A).

El tiempo de permanencia bajo la lluvia se encuentra implícito en las variables de la velocidad del caminante y de la distancia que éste debe recorrer, por lo cual no se considera como una variable más del problema.

Es obvio que el análisis no es válido si la persona está usando ropa impermeable.

3. ANÁLISIS DIMENSIONAL

Consideremos las variables del problema en sus dimensiones básicas (longitud L, masa M y tiempo T):

Variable	Dimensiones básicas
m_w	M
$\dot{m}_{rA}$	$\frac{M}{TL^2}$
D	L
V_r	$\frac{L}{T}$
V_p	$\frac{L}{T}$
A	L^2

Tenemos entonces 6 variables con un total de 3 dimensiones básicas. De acuerdo con el Teorema Π de Buckingham necesitamos un total de 6 – 3 = 3 grupos o números adimensionales para describir completamente el problema.

Los números adimensionales a tratar se toman como funciones de las variables implicadas de la siguiente forma:

$$\Pi_1 = f_1(\dot{m}_{rA}, A, V_p, m_w)$$
$$\Pi_2 = f_2(\dot{m}_{rA}, A, V_p, V_r)$$
$$\Pi_3 = f_3(\dot{m}_{rA}, A, V_p, D)$$

Hallemos entonces los números adimensionales:

- Para Π_1:

Sea $\Pi_1 = \dot{m}_{rA}{}^{\alpha} A^{\beta} V_p{}^{\gamma} m_w{}^{\delta}$, donde los exponentes α, β, γ y δ deben ser hallados tal que la contribución total de ellos cancele todas las dimensiones implicadas en el problema. Dimensionalmente tenemos:

$$\left(\frac{M}{TL^2}\right)^{\alpha} \left(L^2\right)^{\beta} \left(\frac{L}{T}\right)^{\gamma} \left(M\right)^{\delta} = 1$$

De donde surge el siguiente sistema de ecuaciones de acuerdo a las dimensiones:

Dimensión	Ecuación
M	$\alpha + \delta = 0$
L	$-2\alpha + 2\beta + \gamma = 0$
T	$-\alpha - \gamma = 0$

Como se desea que m_w se encuentre en el numerador del número adimensional, hacemos $\delta = 1$ de donde $\alpha = -1$, $\gamma = 1$ y además $\beta = -3/2$. El número adimensional así hallado sería entonces:

$$\Pi_1 = \frac{m_w V_p}{\dot{m}_{rA} A^{3/2}}$$

Sin embargo (y posiblemente algunos de los lectores estarán en desacuerdo con el siguiente paso, siendo que *en las universidades enseñan procedimientos pero no a pensar*), el número Π_1 así definido no tiene mucho sentido puesto que el área elevada a la 3/2 no dice mucho sobre el problema, así que he decidido cambiar el término $A^{3/2}$ por el término *AD*. Más adelante se verá el por qué de esto. El número Π_1 queda entonces de la forma:

$$\boxed{\Pi_1 = \frac{m_w V_p}{\dot{m}_{rA} A D}}$$

El lector puede comprobar que el número así definido es adimensional. Éste es el número que es llamado *número de mojado* en la referencia dada al final del artículo, sólo que en ésta ocasión sí tiene en cuenta el área superficial de la ropa.

- Para Π_2:

Sea $\Pi_2 = \dot{m}_{rA}{}^{\alpha} A^{\beta} V_p{}^{\gamma} V_r{}^{\delta}$, donde los exponentes α, β, γ y δ deben ser hallados tal que la contribución total de ellos cancele todas las dimensiones implicadas en el problema.. Dimensionalmente tenemos:

$$\left(\frac{M}{TL^2}\right)^{\alpha} \left(L^2\right)^{\beta} \left(\frac{L}{T}\right)^{\gamma} \left(\frac{L}{T}\right)^{\delta} = 1$$

De donde surge el siguiente sistema de ecuaciones de acuerdo a las dimensiones:

Dimensión	Ecuación
M	$\alpha = 0$
L	$-2\alpha + 2\beta + \gamma + \delta = 0$
T	$-\alpha - \gamma - \delta = 0$

Por cuestiones que se verán más adelante, se selecciona $\delta = 1$, de donde $\gamma = -1$ y $\beta = 0$. El número adimensional así hallado sería entonces:

$$\boxed{\Pi_2 = \frac{V_r}{V_p}}$$

El cual es la *razón de velocidades* detallada en el artículo referenciado al final del presente artículo.

- Para Π_3:

Sea $\Pi_3 = \dot{m}_{rA}{}^{\alpha} A^{\beta} V_p{}^{\gamma} D^{\delta}$, donde los exponentes α, β, γ y δ deben ser hallados tal que la contribución total de ellos cancele todas las dimensiones implicadas en el problema.. Dimensionalmente tenemos:

$$\left(\frac{M}{TL^2}\right)^{\alpha} \left(L^2\right)^{\beta} \left(\frac{L}{T}\right)^{\gamma} \left(L\right)^{\delta} = 1$$

De donde surge el siguiente sistema de ecuaciones de acuerdo a las dimensiones:

Dimensión	Ecuación
M	$\alpha = 0$
L	$-2\alpha + 2\beta + \gamma + \delta = 0$
T	$-\alpha - \gamma = 0$

Sea $\delta = 1$, de donde $\beta = -1/2$ y $\gamma = 0$. El número adimensional así hallado sería entonces:

$$\boxed{\Pi_3 = \frac{D}{\sqrt{A}}}$$

Éste número es una *razón de medidas*, y es una comparación entre la distancia a recorrer y el área superficial de la ropa. Éste número es útil para hacer los experimentos con modelos a escala.

4. MODELADO MATEMÁTICO

Con los números adimensionales arriba hallados ya es posible realizar las experimentaciones para hallar la relación empírica entre la masa de agua absorbida y todas las demás variables implicadas, haciendo que el número de mojado sea función de la razón de velocidades y la razón de medidas de la forma

$$\frac{m_w V_p}{\dot{m}_{rA} AD} = f\left(\frac{V_r}{V_p}, \frac{D}{\sqrt{A}}\right) \qquad \textbf{(1)}$$

Sin embargo, tal como ya lo había expresado, dejo a algún lector interesado en el tema, con los recursos necesarios y las ganas de mojarse (o con la capacidad de hacer que sea otro el que salga a mojarse bajo la lluvia) la responsabilidad de hallar las correlaciones empíricas, aclarando, eso sí, que si llega a hacerlas por favor tenga la amabilidad de darme a conocer los resultados a mi correo electrónico. En lo que respecta en lo que sigue del presente artículo, procederé con la lógica formal que manejo.

Podemos suponer que el número de mojado posee una relación lineal con el producto de la razón de velocidades y la razón de medidas, de la siguiente manera:

$$\frac{m_w V_p}{\dot{m}_{rA} AD} = a + b\frac{V_r}{V_p}\frac{D}{\sqrt{A}} \qquad \textbf{(2)}$$

Las constantes adimensionales *a* y *b* que aparecen en la ecuación (2) deben ser halladas por medio de la experimentación (otra llamada al lector interesado en mojarse...), aunque un vistazo a la ecuación (2) muestra que son números positivos.

Despejando de la ecuación (2) el término que nos interesa y por el cual se ha hecho todo el análisis anterior, tenemos que la masa de agua absorbida es, luego de realizar los procedimientos algebraicos correspondientes:

$$\boxed{m_w = \dot{m}_{rA}\left(a\frac{AD}{V_p} + b\frac{V_r D^2 \sqrt{A}}{V_p{}^2}\right)}$$

(3)

5. VALIDEZ DEL MODELO

Veamos ahora si el modelo matemático dado por la ecuación (3) se ajusta a la experiencia diaria.

- Persona quieta bajo la lluvia:

Hacemos $V_p \to 0$, entonces tenemos:

$$m_w\big|_{V_p\to 0} = \lim_{V_p\to 0} \dot{m}_{rA}\left(a\frac{AD}{V_p} + b\frac{V_r D^2\sqrt{A}}{V_p^{\ 2}}\right) = \infty$$

Lo que indica que una persona quieta bajo la lluvia o andando muy lentamente se moja mucho. Esto lo puede observar o experimentar cualquier persona en un día de lluvia.

- Ropa muy grande o con extensiones (capas, etc...):

Tenemos de la ecuación (3):

$$m_w\big|_{A\to\infty} = \lim_{A\to\infty} \dot{m}_{rA}\left(a\frac{AD}{V_p} + b\frac{V_r D^2\sqrt{A}}{V_p^{\ 2}}\right) = \infty$$

Lo cual indica que un área superficial muy grande absorberá una muy grande cantidad de agua (mala señal para las damas que usan grandes abrigos de pieles). Esto es hasta cierto punto lógico y se ajusta a la intuición.

- Muy larga distancia a recorrer:

¿Qué pasa si el resguardo más cercano se encuentra lejos de nosotros cuando nos sorprende un aguacero? Hacemos $D \to \infty$ en la ecuación (3):

$$m_w\big|_{D\to\infty} = \lim_{D\to\infty} \dot{m}_{rA}\left(a\frac{AD}{V_p} + b\frac{V_r D^2\sqrt{A}}{V_p^{\ 2}}\right) = \infty$$

Lo que quiere decir que si se recorre una muy larga distancia bajo la lluvia, la persona se mojará mucho. En la vida diaria vemos que esto es así, por lo cual la ecuación (3) sigue ajustándose a las observaciones empíricas.

- No se recorre ninguna distancia bajo la lluvia:

Hacemos $D = 0$ en la ecuación (3):

$$m_w\big|_{D=0} = \dot{m}_{rA}\left(a\frac{AD}{V_p} + b\frac{V_r D^2\sqrt{A}}{V_p^{\ 2}}\right)\Bigg|_{D=0} = 0$$

Lo que quiere decir que si no se recorre distancia bajo la lluvia, la persona no se mojará en lo absoluto (lo cual es obvio y no merece más detalles).

- Alta velocidad horizontal de las gotas de lluvia:

Cuando la velocidad horizontal de las gotas de lluvia es muy alta (o su equivalente: la velocidad del viento que mueve las gotas es muy alta) tenemos:

$$m_w\big|_{V_r\to\infty} = \lim_{V_r\to\infty} \dot{m}_{rA}\left(a\frac{AD}{V_p} + b\frac{V_r D^2\sqrt{A}}{V_p^{\ 2}}\right) = \infty$$

Lo cual indica que con muy alta velocidad del viento el caminante se mojará mucho. Ésta conclusión a la que se llega con la ecuación (3) también es clara después de haber estado presente en muchos aguaceros acompañados de ventiscas, en los cuales se termina calado de agua hasta los huesos.

- La lluvia cae verticalmente:

O su equivalente de “no hay viento que mueva la lluvia”. Haciendo $V_r = 0$ en la ecuación (3) tenemos:

$$m_w\big|_{V_r=0} = a\frac{\dot{m}_{rA}AD}{V_p} \quad \textbf{(4)}$$

Ésta expresión indica que así no haya viento moviendo las gotas de lluvia, de todas formas la persona se mojará de una manera proporcional a la distancia a recorrer e inversamente proporcional a la velocidad con la cual recorra esa distancia.

Hemos visto con lo anterior que el modelo matemático se ajusta a las observaciones de la vida diaria, lo cual explica el por qué de la escogencia de los números adimensionales de la forma que se ha hecho; al ajustarse el modelo a nuestra relación con la realidad vemos que puede ser utilizado para hacer algunas predicciones (las cuales deben corroborarse luego experimentalmente).

6. PREDICCIONES DEL MODELO

- ¿Es posible no mojarse bajo la lluvia?

Igualando la ecuación (3) a cero tenemos:

$$\frac{1}{V_p} = 0 \quad \vee \quad a + b\frac{V_r D}{V_p\sqrt{A}} = 0$$

Es obvio que la primera condición es imposible de cumplir, de la segunda tenemos:

$$V_p = -\frac{bV_r D}{a\sqrt{A}}$$

Como estamos tratando con magnitudes, V_p no puede ser negativo, por lo cual no hay manera de evitar mojarse bajo la lluvia.

- Persona corriendo rápido:

Para saber qué pasa cuando la persona recorre muy rápidamente la distancia hacia el resguardo más próximo (es decir, va corriendo), hacemos $V_p \to \infty$:

$$m_w\big|_{V_p\to\infty} = \lim_{V_p\to\infty} \dot{m}_{rA}\left(a\frac{AD}{V_p} + b\frac{V_r D^2\sqrt{A}}{V_p^{\,2}}\right) = 0$$

Lo cual indica que si la persona va corriendo muy rápido, se mojará muy poco.

- Variación de m_w con V_p:

Tomando la derivada parcial tenemos:

$$\frac{\partial m_w}{\partial V_p} = -\frac{\dot{m}_{rA}AD}{V_p^{\,2}}\left(a + 2b\frac{V_r D}{V_p\sqrt{A}}\right)$$

El signo negativo indica que la cantidad de agua absorbida disminuye a medida que aumenta la velocidad del caminante. Es decir, una persona corriendo se mojará menos que una persona caminando bajo la lluvia.

7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

He aquí el propósito de todo éste artículo: el modelo matemático hallado por la abstracción de la realidad que se ha ajustado a nuestra experiencia con ella nos muestra el por qué la reacción instintiva tanto de las personas como de los animales de correr lo más rápido posible a buscar el resguardo más cercano cuando inicia un aguacero. El instinto nos indica que al correr absorbemos menor cantidad de agua que si fuéramos caminando, igualmente, el instinto nos indica que la mejor manera de permanecer secos es andar la menor distancia posible bajo la lluvia; el modelo desarrollado muestra el por qué de todo esto desde un punto de vista lógico, que tanto gusta a los racionalistas, y de paso desmiente a quienes afirman, contra su propio instinto, que es mejor caminar bajo la lluvia para mojarse menos. Me complace saber que los *Mythbusters* al repetir su experimento han mostrado que el modelo desarrollado en éste artículo es cercano a la realidad por nosotros percibida. A continuación se presenta un resumen de las conclusiones y recomendaciones principales del artículo:

- El modelo matemático propuesto se ajusta a las observaciones de la vida diaria, así como a los instintos desarrollados tanto en las personas como los animales.
- El análisis realizado no es válido si la persona usa ropa impermeable.
- Deben realizarse experimentos que hallen una correlación empírica entre el número de mojado, la razón de velocidades y la razón de medidas, para que confirmen la ecuación (3) y determinen las constantes a y b o hallen un mejor modelo.
- La cantidad de agua absorbida por la ropa del caminante bajo la lluvia tiene una relación cuadrática con la distancia a recorrer, trate de recorrer distancias lo más cortas posibles.
- Si tiene ropa con grandes extensiones (como capas o vestidos de novia) no impermeables, evite salir con ellos a la lluvia si no los quiere mojar.
- Si la velocidad del viento es muy alta (como sucede en las tormentas), se mojará mucho por más rápido que corra.
- Para evitar mojarse mucho, es conveniente correr todo lo rápido que pueda (con cuidado para evitar caídas).
- Compre un paraguas (de buena calidad).

8. BIBLIOGRAFÍA

- De Castro, Carlos Armando. *Análisis Dimensional: ¿es mejor caminar o correr bajo la lluvia?.* Publicado en la web en la dirección http://cadecastro.googlepages.com/lluvia2.pdf .

Carlos A. De Castro P. A la fecha (julio de 2007) estudiante de Ingeniería Mecánica en la Universidad de los Andes en Bogotá, Colombia. Escritor en la web (desde 2005) de artículos de librepensamiento, crítica y fomento del conocimiento, fundador de la página web http://es.geocities.com/grupolibrepensamiento.